**CHÖÔNG II:**

**ÑÖÔØNG THAÚNG VAØ MAËT PHAÚNG TRONG KHOÂNG GIAN**

**QUAN HEÄ SONG SONG**

**I. ÑÖÔØNG THAÚNG VAØ MAËT PHAÚNG TRONG KHOÂNG GIAN**

**1. Xaùc ñònh moät maët phaúng**

• Ba ñieåm khoâng thaúng haøng thuoäc maët phaúng. (*mp(ABC), (ABC)*)

• Moät ñieåm vaø moät ñöôøng thaúng khoâng ñi qua ñieåm ñoù thuoäc maët phaúng. (*mp(A,d)*)

• Hai ñöôøng thaúng caét nhau thuoäc maët phaúng. (*mp(a, b))*

**2. Moät soá qui taéc veõ hình bieåu dieãn cuûa hình khoâng gian**

• Hình bieåu dieãn cuûa ñöôøng thaúng laø ñöôøng thaúng, cuûa ñoaïn thaúng laø ñoaïn thaúng.

• Hình bieåu dieãn cuûa hai ñöôøng thaúng song song laø hai ñöôøng thaúng song song, cuûa hai ñöôøng thaúng caét nhau laø hai ñöôøng thaúng caét nhau.

• Hình bieåu dieãn phaûi giöõ nguyeân quan heä thuoäc giöõa ñieåm vaø ñöôøng thaúng.

• Ñöôøng nhìn thaáy veõ neùt lieàn, ñöôøng bò che khuaát veõ neùt ñöùt.

**VAÁN ÑEÀ 1: Tìm giao tuyeán cuûa hai maët phaúng**

*Muoán tìm giao tuyeán cuûa hai maët phaúng ta coù theå tìm hai ñieåm chung phaân bieät cuûa hai maët phaúng. Khi ñoù giao tuyeán laø ñöôøng thaúng ñi qua hai ñieåm chung ñoù.*

1. Cho hình choùp S.ABCD. Ñaùy ABCD coù AB caét CD taïi E, AC caét BD taïi F.

a) Tìm giao tuyeán cuûa caùc caëp maët phaúng (SAB) vaø (SCD), (SAC) vaø (SBD).

b) Tìm giao tuyeán cuûa (SEF) vôùi caùc maët phaúng (SAD), (SBC).

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy ABCD laø hình bình haønh taâm O. M, N, P laàn löôït laø trung ñieåm cuûa BC, CD, SO. Tìm giao tuyeán cuûa mp(MNP) vôùi caùc maët phaúng (SAB), (SAD), (SBC) vaø (SCD).
2. Cho töù dieän ABCD. Goïi I, J laàn löôït laø trung ñieåm cuûa AC vaø BC. K laø moät ñieåm treân caïnh BD sao cho KD < KB. Tìm giao tuyeán cuûa mp(IJK) vôùi (ACD) vaø (ABD).
3. Cho töù dieän ABCD. Goïi I, J laàn löôït laø trung ñieåm cuûa AD vaø BC.

a) Tìm giao tuyeán cuûa 2 maët phaúng (IBC) vaø (JAD).

b) M laø moät ñieåm treân caïnh AB, N laø moät ñieåm treân caïnh AC. Tìm giao tuyeán cuûa 2 maët phaúng (IBC) vaø (DMN).

1. Cho töù dieän (ABCD). M laø moät ñieåm beân trong ΔABD, N laø moät ñieåm beân trong ΔACD. Tìm giao tuyeán cuûa caùc caëp maët phaúng (AMN) vaø (BCD), (DMN) vaø (ABC).

**VAÁN ÑEÀ 2: Tìm giao ñieåm cuûa ñöôøng thaúng vaø maët phaúng**

*Muoán tìm giao ñieåm cuûa moät ñöôøng thaúng vaø moät maët phaúng ta coù theå tìm giao ñieåm cuûa ñöôøng thaúng ñoù vôùi moät ñöôøng thaúng naèm trong maët phaúng ñaõ cho.*

1. Cho töù dieän ABCD. Treân AC vaø AD laàn löôït laáy caùc ñieåm M, N sao cho MN khoâng song song voùi CD. Goïi O laø moät ñieåm beân trong ΔBCD.

a) Tìm giao tuyeán cuûa (OMN) vaø (BCD).

b) Tìm giao ñieåm cuûa BC vaø BD vôùi maët phaúng (OMN).

1. Cho hình choùp S.ABCD. M laø moät ñieåm treân caïnh SC.

a) Tìm giao ñieåm cuûa AM vaø (SBD).

b) Goïi N laø moät ñieåm treân caïnh BC. Tìm giao ñieåm cuûa SD vaø (AMN).

1. Cho töù dieän ABCD. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa AC vaø BC. K laø moät ñieåm treân caïnh BD vaø khoâng truøng vôùi trung ñieåm cuûa BD. Tìm giao ñieåm cuûa CD vaø AD vôùi maët phaúng (MNK).
2. Cho töù dieän ABCD. M, N laø hai ñieåm laàn löôït treân AC vaø AD. O laø moät ñieåm beân trong ΔBCD. Tìm giao ñieåm cuûa:

a) MN vaø (ABO). b) AO vaø (BMN).

*HD: a) Tìm giao tuyeán cuûa (ABO) vaø (ACD).*

*b) Tìm giao tuyeán cuûa (BMN) vaø (ABO).*

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình thang, caïnh ñaùy lôùn AB. Goïi I, J, K laø ba ñieåm laàn löôït treân SA, AB, BC.

a) Tìm giao ñieåm cuûa IK vôùi (SBD).

b) Tìm caùc giao ñieåm cuûa maët phaúng (IJK) vôùi SD vaø SC.

*HD: a) Tìm giao tuyeán cuûa (SBD) vôùi (IJK).*

*b) Tìm giao tuyeán cuûa (IJK) vôùi (SBD vaø (SCD).*

**VAÁN ÑEÀ 3: Chöùng minh ba ñieåm thaúng haøng, ba ñöôøng thaúng ñoàng qui**

*• Muoán chöùng minh ba ñieåm thaúng haøng ta coù theå chöùng minh chuùng cuøng thuoäc hai maët phaúng phaân bieät.*

*• Muoán chöùng minh ba ñöôøng thaúng ñoàng qui ta coù theå chöùng minh giao ñieåm cuûa hai ñöôøng thaúng naøy laø ñieåm chung cuûa hai maët phaúng maø giao tuyeán laø ñöôøng thaúng thöù ba.*

1. Cho hình choùp S.ABCD. Goïi I, J laø hai ñieåm coá ñònh treân SA vaø SC vôùi SI > IA vaø SJ < JC. Moät maët phaúng (P) quay quanh IJ caét SB taïi M, SD taïi N.

a) CMR: IJ, MN vaø SO ñoàng qui (O =AC∩BD). Suy ra caùch döïng ñieåm N khi bieát M.

b) AD caét BC taïi E, IN caét MJ taïi F. CMR: S, E, F thaúng haøng.

c) IN caét AD taïi P, MJ caét BC taïi Q. CMR PQ luoân ñi qua 1 ñieåm coá ñònh khi (P) di ñoäng.

1. Cho maët phaúng (P) vaø ba ñieåm A, B, C khoâng thaúng haøng ôû ngoaøi (P). Giaû söû caùc ñöôøng thaúng BC, CA, AB laàn löôït caét (P) taïi D, E, F. Chöùng minh D, E, F thaúng haøng.
2. Cho töù dieän ABCD. Goïi E, F, G laàn löôït laø ba ñieåm treân ba caïnh AB, AC, BD sao cho EF caét BC taïi I, EG caét AD taïi H. Chöùng minh CD, IG, HF ñoàng qui.
3. Cho hai ñieåm coá ñònh A, B ôû ngoaøi maët phaúng (P) sao cho AB khoâng song song vôùi (P). M laø moät ñieåm di ñoäng trong khoâng gian sao cho MA, MB caét (P) taïi A′, B′. Chöùng minh A′B′ luoân ñi qua moät ñieåm coá ñònh.
4. Cho töù dieän SABC. Qua C döïng maët phaúng (P) caét AB, SB taïi B1, B′. Qua B döïng maët phaúng (Q) caét AC, SC taïi C1, C′. BB′, CC′ caét nhau taïi O′; BB1, CC1 caét nhau taïi O1. Giaû söû O′O1 keùo daøi caét SA taïi I.

a) Chöùng minh: AO1, SO′, BC ñoàng qui.

b) Chöùng minh: I, B1, B′ vaø I, C1, C′ thaúng haøng.

**VAÁN ÑEÀ 4: Xaùc ñònh thieát dieän cuûa moät hình choùp vôùi moät maët phaúng**

*Muoán xaùc ñònh thieát dieän cuûa moät hình choùp vôùi maët phaúng (P) ta coù theå laøm nhö sau:*

*• Töø ñieåm chung coù saün, xaùc ñònh giao tuyeán ñaàu tieân cuûa (P) vôùi moät maët cuûa hình choùp (coù theå laø maët phaúng trung gian).*

*• Cho giao tuyeán naøy caét caùc caïnh cuûa maët ñoù cuûa hình choùp, ta seõ ñöôïc caùc ñieåm chung môùi cuûa (P) vôùi caùc maët khaùc. Töø ñoù xaùc ñònh ñöôïc caùc giao tuyeán môùi vôùi caùc maët naøy.*

*• Tieáp tuïc nhö treân cho tôùi khi caùc giao tuyeán kheùp kín ta ñöôïc thieát dieän.*

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình bình haønh taâm O. Goïi M, N, I laø ba ñieåm treân AD, CD, SO. Tìm thieát dieän cuûa hình choùp vôùi maët phaúng (MNI).
2. Cho töù dieän ñeàu ABCD, caïnh baèng a. Keùo daøi BC moät ñoaïn CE=a. Keùo daøi BD moät ñoaïn DF=a. Goïi M laø trung ñieåm cuûa AB.

a) Tìm thieát dieän cuûa töù dieän vôùi maët phaúng (MEF).

b) Tính dieän tích cuûa thieát dieän. *HD: b) *

1. Cho hình choùp S.ABC. M laø moät ñieåm treân caïnh SC, N vaø P laàn löôït laø trung ñieåm cuûa AB vaø AD. Tìm thieát dieän cuûa hình choùp vôùi maët phaúng (MNP).

*HD: Thieát dieän laø 1 nguõ giaùc.*

1. Cho hình choùp S.ABCD. Trong ΔSBC, laáy moät ñieåm M. Trong ΔSCD, laáy moät ñieåm N.

a) Tìm giao ñieåm cuûa MN vaø (SAC).

b) Tìm giao ñieåm cuûa SC vôùi (AMN).

c) Tìm thieát dieän cuûa hình choùp S.ABCD vôùi maët phaúng (AMN).

*HD: a) Tìm (SMN)∩(SAC) b) Thieát dieän laø töù giaùc.*

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình bình haønh taâm O. Goïi M, N, P laàn löôït laø trung ñieåm cuûa SB, SD vaø OC.

a) Tìm giao tuyeán cuûa (MNP) vôùi (SAC), vaø giao ñieåm cuûa (MNP) vôùi SA.

b) Xaùc ñònh thieát dieän cuûa hình choùp vôùi (MNP) vaø tính tæ soá maø (MNP) chia caùc caïnh SA, BC, CD.

*HD: b) Thieát dieän laø nguõ giaùc. Caùc tæ soá laø: 1/3; 1; 1.*

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình bình haønh. Goïi M laø trung ñieåm cuûa SB, G laø troïng taâm ΔSAD.

a) Tìm giao ñieåm I cuûa GM vôùi (ABCD). Chöùng minh (CGM) chöùa CD.

b) Chöùng minh (CGM) ñi qua trung ñieåm cuûa SA. Tìm thieát dieän cuûa hình choùp vôùi (CGM).

c) Tìm thieát dieän cuûa hình choùp vôùi (AGM).

*HD: b) Thieát dieän laø töù giaùc c) Tìm (AGM)∩(SAC). Thieát dieän laø töù giaùc.*

1. Cho hình choùp S.ABCD, M laø moät ñieåm treân caïnh BC, N laø moät ñieåm treân caïnh SD.

a) Tìm giao ñieåm I cuûa BN vaø (SAC) vaø giao ñieåm J cuûa MN vaø (SAC).

b) DM caét AC taïi K. Chöùng minh S, K, J thaúng haøng.

c) Xaùc ñònh thieát dieän cuûa hình choùp S.ABCD vôùi maët phaúng (BCN).

*HD: a) Goïi O=AC∩BD thì I=SO∩BN, J=AI∩MN*

*b) J laø ñieåm chung cuûa (SAC) vaø (SDM)*

*c) Noái CI caét SA taïi P. Thieát dieän laø töù giaùc BCNP.*

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình thang ABCD vôùi AB//CD vaø AB > CD. Goïi I laø trung ñieåm cuûa SC. Maët phaúng (P) quay quanh AI caét caùc caïnh SB, SD laàn löôït taïi M, N.

a) Chöùng minh MN luoân ñi qua moät ñieåm coá ñònh.

b) IM keùo daøi caét BC taïi P, IN keùo daøi caét CD taïi Q. Chöùng minh PQ luoân ñi qua 1 ñieåm coá ñònh.

c) Tìm taäp hôïp giao ñieåm cuûa IM vaø AN.

*HD: a) Qua giao ñieåm cuûa AI vaø SO=(SAC)∩(SBD).*

*b) Ñieåm A.*

*c) Moät ñoaïn thaúng.*

**II. HAI ÑÖÔØNG THAÚNG SONG SONG**

**1. Ñònh nghóa**



**

**2. Tính chaát**

• *Neáu ba maët phaúng phaân bieät caét nhau töøng ñoâi moät theo ba giao tuyeán phaân bieät thì ba giao tuyeán aáy hoaëc ñoàng qui hoaëc ñoâi moät song song.*

*• Neáu hai maët phaúng caét nhau laàn löôït ñi qua hai ñöôøng thaúng song song thì giao tuyeán cuûa chuùng song song vôùi hai ñöôøng thaúng ñoù hoaëc truøng vôùi moät trong hai ñöôøng thaúng ñoù.*

*• Hai ñöôøng thaúng phaân bieät cuøng song song vôùi ñöôøng thaúng thöù ba thì song song vôùi nhau.*

**VAÁN ÑEÀ 1: Chöùng minh hai ñöôøng thaúng song song**

*Phöông phaùp: Coù theå söû duïng 1 trong caùc caùch sau:*

1. Chöùng minh 2 ñöôøng thaúng ñoù ñoàng phaúng, roài aùp duïng phöông phaùp chöùng minh song song trong hình hoïc phaúng (nhö tính chaát ñöôøng trung bình, ñònh lí Taleùt ñaûo, …)

*2. Chöùng minh 2 ñöôøng thaúng ñoù cuøng song song vôùi ñöôøng thaúng thöù ba.*

*3. AÙp duïng ñònh lí veà giao tuyeán song song.*

1. Cho töù dieän ABCD. Goïi I, J laàn löôït laø troïng taâm caùc tam giaùc ABC, ABD. Chöùng minh IJ//CD.
2. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình thang vôùi ñaùy lôùn AB. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa SA vaø SB.

a) Chöùng minh: MN // CD.

b) Tìm giao ñieåm P cuûa SC vôùi (AND). Keùo daøi AN vaø DP caét nhau taïi I. Chöùng minh SI // AB // CD. Töù giaùc SABI laø hình gì?

1. Cho töù dieän ABCD. Goïi M, N, P, Q, R, S laàn löôït laø trung ñieåm cuûa AB, CD, BC, AD, AC, BD.

a) Chöùng minh MNPQ laø hình bình haønh.

b) Töø ñoù suy ra ba ñoaïn MN, PQ, RS caét nhau taïi trung ñieåm cuûa moãi ñoaïn.

1. Cho tam giaùc ABC naèm trong maët phaúng (P). Goïi Bx, Cy laø hai nöûa ñöôøng thaúng song song vaø naèm veà cuøng moät phía ñoái vôùi (P). M, N laø hai ñieåm di ñoäng laàn löôït treân Bx, Cy sao cho CN = 2BM.

a) Chöùng minh ñöôøng thaúng MN luoân ñi qua 1 ñieåm coá ñònh I khi M, N di ñoäng.

b) E thuoäc ñoaïn AM vaø EM = EA. IE caét AN taïi F. Goïi Q laø giao ñieåm cuûa BE vaø CF. CMR AQ song song vôùi Bx, Cy vaø (QMN) chöùa 1 ñöôøng thaúng coá ñònh khi M, N di ñoäng.

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình bình haønh. Goïi M, N, P, Q laø caùc ñieåm laàn löôït naèm treân BC, SC, SD, AD sao cho MN // BS, NP // CD, MQ // CD.

a) Chöùng minh: PQ // SA.

b) Goïi K laø giao ñieåm cuûa MN vaø PQ. Chöùng minh: SK // AD // BC.

c) Qua Q döïng caùc ñöôøng thaúng Qx // SC vaø Qy // SB. Tìm giao ñieåm cuûa Qx vôùi (SAB) vaø cuûa Qy vôùi (SCD).

**VAÁN ÑEÀ 2: Tìm giao tuyeán cuûa hai maët phaúng**

*Phöông phaùp:*

*• Tìm moät ñieåm chung cuûa hai maët phaúng.*

*• AÙp duïng ñònh lí veà giao tuyeán ñeå tìm phöông cuûa giao tuyeán.*

*Giao tuyeán seõ laø ñöôøng thaúng qua ñieåm chung vaø song song vôùi ñöôøng thaúng aáy.*

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình thang vôùi ñaùy lôùn AB. Goïi I, J laàn löôït laø trung ñieåm cuûa AD, BC vaø G laø troïng taâm cuûa ΔSAB.

a) Tìm giao tuyeán cuûa (SAB) vaø (IJG).

b) Xaùc ñònh thieát dieän cuûa hình choùp vôùi maët phaúng (IJG). Thieát dieän laø hình gì? Tìm ñieàu kieän ñoái vôùi AB vaø CD ñeå thieát dieän laø hình bình haønh.

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình bình haønh. Goïi I, J laàn löôït laø troïng taâm cuûa caùc tam giaùc SAB, SAD. M laø trung ñieåm cuûa CD. Xaùc ñònh thieát dieän cuûa hình choùp vôùi maët phaúng (IJM).
2. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình thang vôùi caùc ñaùy AD = a, BC = b. Goïi I, J laàn löôït laø troïng taâm caùc tam giaùc SAD, SBC.

a) Tìm ñoaïn giao tuyeán cuûa (ADJ) vôùi maët (SBC) vaø ñoaïn giao tuyeán cuûa (BCI) vôùi maët (SAD).

b) Tìm ñoä daøi ñoaïn giao tuyeán cuûa hai maët phaúng (ADJ) vaø (BCI) giôùi haïn bôûi hai maët phaúng (SAB) vaø (SCD).

*HD: b) (a+b).*

1. Cho töù dieän ñeàu ABCD, caïnh a. Goïi I, J laàn löôït laø trung ñieåm cuûa AC, BC. Goïi K laø moät ñieåm treân caïnh BD vôùi KB = 2KD.

a) Xaùc ñònh thieát dieän cuûa töù dieän vôùi maët phaúng (IJK). Chöùng minh thieát dieän laø hình thang caân.

b) Tính dieän tích thieát dieän ñoù.

*HD: b) *

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình vuoâng caïnh a, taâm O. Maët beân SAB laø tam giaùc ñeàu. Ngoaøi ra = 900. Goïi Dx laø ñöôøng thaúng qua D vaø song song vôùi SC.

a) Tìm giao ñieåm I cuûa Dx vôùi mp(SAB). Chöùng minh: AI // SB.

b) Tìm thieát dieän cuûa hình choùp SABCD vôùi mp(AIC). Tính dieän tích thieát dieän.

*HD: b) Tam giaùc AMC vôùi M laø trung ñieåm cuûa SD. Dieän tích *

**III. ÑÖÔØNG THAÚNG vaø MAËT PHAÚNG SONG SONG**

**1. Ñònh nghóa**

*d // (P) ⇔ d ∩ (P) = ∅*

**2. Tính chaát**

*• Neáu ñöôøng thaúng d khoâng naèm treân maët phaúng (P) vaø d song song vôùi ñöôøng thaúng d′ naèm trong (P) thì d song song vôùi (P).*

*• Neáu ñöôøng thaúng d song song vôùi maët phaúng (P) thì moïi maët phaúng (Q) chöùa d maø caét (P) thì caét theo giao tuyeán song song vôùi d.*

*• Neáu hai maët phaúng caét nhau cuøng song song vôùi moät ñöôøng thaúng thì giao tuyeán cuûa chuùng cuõng song song vôùi ñöôøng thaúng ñoù.*

*• Neáu hai ñöôøng thaúng a vaø b cheùo nhau thì coù duy nhaát moät maët phaúng chöùa a vaø song song vôùi b.*

**VAÁN ÑEÀ 1: Chöùng minh ñöôøng thaúng song song vôùi maët phaúng**

Phöông phaùp: Ta chöùng minh d khoâng naèm trong (P) vaø song song vôùi moät ñöôøng thaúng d′ naøo ñoù naèm trong (P).

1. Cho hai hình bình haønh ABCD vaø ABEF khoâng cuøng naèm trong moät maët phaúng.

a) Goïi O, O′ laàn löôït laø taâm cuûa ABCD vaø ABEF. Chöùng minh OO′ song song vôùi caùc maët phaúng (ADF) vaø (BCE).

b) M, N laø 2 ñieåm laàn löôït treân hai caïnh AE, BD sao cho AM = AE, BN = BD. Chöùng minh MN // (CDFE).

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy ABCD laø hình bình haønh. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa caùc caïnh AB, CD.

a) Chöùng minh MN song song vôùi caùc maët phaúng (SBC), (SAD).

b) Goïi P laø trung ñieåm cuûa SA. Chöùng minh SB, SC ñeàu song song vôùi (MNP).

c) Goïi G1, G2 laø troïng taâm cuûa caùc tam giaùc ABC, SBC. Chöùng minh G1G2 // (SBC).

1. Cho töù dieän ABCD. G laø troïng taâm cuûa ΔABD. M laø 1 ñieåm treân caïnh BC sao cho MB = 2MC. Chöùng minh MG // (ACD).

*HD: Chöùng minh MG song song vôùi giao tuyeán cuûa (BMG) vaø (ACD).*

1. Cho töù dieän ABCD. Goïi O, O′ laàn löôït laø taâm ñöôøng troøn noäi tieáp caùc tam giaùc ABC, ABD. Chöùng minh raèng:

a) Ñieàu kieän caàn vaø ñuû ñeå OO′ // (BCD) laø 

b) Ñieàu kieän caàn vaø ñuû ñeå OO′ song song vôùi 2 maët phaúng (BCD), (ACD)

laø BC = BD vaø AC = AD.

*HD: Söû ñuïng tính chaát ñöôøng phaân giaùc trong tam giaùc.*

1. Cho töù dieän ABCD. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa caùc caïnh AB, CD vaø G laø trung ñieåm cuûa ñoaïn MN.

a) Tìm giao ñieåm A′ cuûa ñöôøng thaúng AG vôùi mp(BCD).

b) Qua M keû ñöôøng thaúng Mx song song vôùi AA′ vaø Mx caét (BCD) taïi M′. Chöùng minh B, M′, A′ thaúng haøng vaø BM′ = M′A′ = A′N.

c) Chöùng minh GA = 3GA′.

**VAÁN ÑEÀ 2: Tìm giao tuyeán cuûa hai maët phaúng**

Phöông phaùp: Tìm phöông cuûa giao tuyeán. Töø ñoù xaùc ñònh thieát dieän cuûa hình choùp taïo bôûi maët phaúng song song vôùi moät hoaëc hai ñöôøng thaúng cho tröôùc.

1. Cho hình choùp S.ABCD. M, N laø hai ñieåm treân AB, CD. Maët phaúng (P) qua MN vaø song song vôùi SA.

a) Tìm caùc giao tuyeán cuûa (P) vôùi (SAB) vaø (SAC).

b) Xaùc ñònh thieát dieän cuûa hình choùp vôùi maët phaúng (P).

c) Tìm ñieàu kieän cuûa MN ñeå thieát dieän laø hình thang.

*HD: c) MN // BC*

1. Trong maët phaúng (P), cho tam giaùc ABC vuoâng taïi A, = 600, AB = a. Goïi O laø trung ñieåm cuûa BC. Laáy ñieåm S ôû ngoaøi (P) sao cho SB = a vaø SB ⊥ OA. Goïi M laø 1 ñieåm treân caïnh AB. Maët phaúng (Q) qua M vaø song song vôùi SB vaø OA, caét BC, SC, SA laàn löôït taïi N, P, Q. Ñaët x = BM (0 < x < a).

a) Chöùng minh MNPQ laø hình thang vuoâng.

b) Tính dieän tích hình thang ñoù. Tìm x ñeå dieän tích lôùn nhaát.

*HD: b) SMNPQ = . SMNPQ ñaït lôùn nhaát khi x = *

1. Cho hình choùp S.ABCD. M, N laø hai ñieåm baát kì treân SB, CD. Maët phaúng (P) qua MN vaø song song vôùi SC.

a) Tìm caùc giao tuyeán cuûa (P) vôùi caùc maët phaúng (SBC), (SCD), (SAC).

b) Xaùc ñònh thieát dieän cuûa hình choùp vôùi maët phaúng (P).

1. Cho töù dieän ABCD coù AB = a, CD = b. Goïi I, J laàn löôït laø trung ñieåm cuûa AB vaø CD. Maët phaúng (P) ñi qua moät ñieåm M treân ñoaïn IJ vaø song song vôùi AB vaø CD.

a) Tìm giao tuyeán cuûa (P) vôùi (ICD).

b) Xaùc ñònh thieát dieän cuûa töù dieän ABCD vôùi (P).

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình bình haønh. Goïi C′ laø trung ñieåm cuûa SC, M laø 1 ñieåm di ñoäng treân caïnh SA. Maët phaúng (P) di ñoäng luoân ñi qua C′M vaø song song vôùi BC.

a) Chöùng minh (P) luoân chöùa moät ñöôøng thaúng coá ñònh.

b) Xaùc ñònh thieát dieän maø (P) caét hình choùp SABCD. Xaùc ñònh vò trí ñieåm M ñeå thieát dieän laø hình bình haønh.

c) Tìm taäp hôïp giao ñieåm cuûa 2 caïnh ñoái cuûa thieát dieän khi M di ñoäng treân caïnh SA.

*HD: a) Ñöôøng thaúng qua C′ vaø song song vôùi BC.*

*b) Hình thang. Hình bình haønh khi M laø trung ñieåm cuûa SA.*

*c) Hai nöûa ñöôøng thaúng.*

**IV. HAI MAËT PHAÚNG SONG SONG**

**1. Ñònh nghóa**

*(P) // (Q) ⇔ (P) ∩ (Q) = ∅*

**2. Tính chaát**

• *Neáu maët phaúng (P) chöùa hai ñöôøng thaúng a, b caét nhau vaø cuøng song song vôùi maët phaúng (Q) thì (P) song song vôùi (Q).*

*• Neáu ñöôøng thaúng d song song vôùi mp(P) thì coù duy nhaát moät mp(Q) chöùa d vaø song song vôùi (P).*

*• Hai maët phaúng phaân bieät cuøng song song vôùi maët phaúng thöù ba thì song song vôùi nhau.*

*• Cho moät ñieåm A ∉ (P). khi ñoù moïi ñöôøng thaúng ñi qua A vaø song song vôùi (P) ñeàu naèm trong moät mp(Q) ñi qua A vaø song song vôùi (P).*

*• Neáu moät maët phaúng caét moät trong hai maët phaúng song song thì cuõng caét maët phaúng kia vaø caùc giao tuyeán cuûa chuùng song song vôùi nhau.*

*• Hai maët phaúng song song chaén treân hai caùt tuyeán song song nhöõng ñoaïn thaúng baèng nhau.*

*•* ***Ñònh lí Thales:*** *Ba maët phaúng ñoâi moät song song chaén treân hai caùt tuyeán baát kì nhöõng ñoaïn thaúng töông öùng tæ leä.*

*•* ***Ñònh lí Thales ñaûo:*** *Giaû söû treân hai ñöôøng thaúng d vaø d′ laàn löôït laáy caùc ñieåm A, B, C vaø A′, B′, C′ sao cho:*

**

*Khi ñoù, ba ñöôøng thaúng AA′, BB′, CC′ laàn löôït naèm treân ba maët phaúng song song, töùc laø chuùng cuøng song vôùi moät maët phaúng.*

**VAÁN ÑEÀ 1: Chöùng minh hai maët phaúng song song**

Phöông phaùp: Chöùng minh maët phaúng naøy chöùa hai ñöôøng thaúng caét nhau laàn löôït song song vôùi hai ñöôøng thaúng trong maët phaúng kia.

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình bình haønh taâm O. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa SA, SD.

a) Chöùng minh (OMN) // (SBC).

b) Goïi P, Q laø trung ñieåm cuûa AB, ON. Chöùng minh PQ // (SBC).

1. Cho töù dieän ABCD. Goïi I, J laø hai ñieåm di ñoäng laàn löôït treân caùc caïnh AD, BC sao cho luoân coù: .

a) CMR: IJ luoân song song vôùi 1 maët phaúng coá ñònh.

b) Tìm taäp hôïp ñieåm M chia ñoaïn IJ theo tæ soá k cho tröôùc.

HD: a) IJ song song vôùi mp qua AB vaø song song CD.

b) Taäp hôïp ñieåm M laø ñoaïn EF vôùi E, F laø caùc ñieåm chia AB, CD theo tæ soá k.

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình bình haønh taâm O. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa SA vaø CD.

a) CMR: (OMN) // (SBC).

b) Goïi I laø trung ñieåm cuûa SD, J laø moät ñieåm treân (ABCD) vaø caùch ñeàu AB, CD. Chöùng minh IJ song song (SAB).

c) Giaû söû hai tam giaùc SAD, ABC ñeàu caân taïi A. Goïi AE, AF laø caùc ñöôøng phaân giaùc trong cuûa caùc tam giaùc ACD vaø SAB. Chöùng minh EF // (SAD).

HD: c) Chuù yù: 

1. Cho hai hình vuoâng ABCD vaø ABEF ôû trong hai maët phaúng khaùc nhau. Treân caùc ñöôøng cheùo AC vaø BF laàn löôït laáy caùc ñieåm M, N sao cho: AM = BN. Caùc ñöôøng thaúng song song vôùi AB veõ töø M, N laàn löôït caét AD, AF taïi M′, N′.

a) Chöùng minh: (CBE) // (ADF).

b) Chöùng minh: (DEF) // (MNN′M′).

c) Goïi I laø trung ñieåm cuûa MN, tìm taäp hôïp ñieåm I khi M, N di ñoäng.

HD: c) Trung tuyeán tam giaùc ODE veõ töø O.

1. Cho hai nöûa ñöôøng thaúng cheùo nhau Ax, By. M vaø N laø hai ñieåm di ñoäng laàn löôït treân Ax, By sao cho AM = BN. Veõ .

a) Chöùng minh MP coù phöông khoâng ñoåi vaø MN luoân song song vôùi 1 maët phaúng coá ñònh.

b) Goïi I laø trung ñieåm cuûa MN. CMR I naèm treân 1 ñöôøng thaúng coá ñònh khi M, N di ñoäng.

1. Cho töù dieän ABCD coù AB = AC = AD. CMR caùc ñöôøng phaân giaùc ngoaøi cuûa caùc goùc  ñoàng phaúng.

HD: Cuøng naèm trong maët phaúng qua A vaø song song vôùi (BCD).

**VAÁN ÑEÀ 2: Tìm giao tuyeán cuûa hai maët phaúng**

Phöông phaùp:

• Tìm phöông cuûa giao tuyeán baèng caùch söû duïng ñònh lí: Neáu 2 maët phaúng song song bò caét bôûi 1 maët phaúng thöù ba thì 2 giao tuyeán song song.

• Söû duïng ñònh lí treân ñeå xaùc ñònh thieát dieän cuûa hình choùp bò caét bôûi 1 maët phaúng song song vôùi 1 maët phaúng cho tröôùc.

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình bình haønh taâm O vôùi AC = a, BD = b. Tam giaùc SBD ñeàu. Moät maët phaúng (P) di ñoäng luoân song song vôùi mp(SBD) vaø ñi qua ñieåm I treân ñoaïn AC.

a) Xaùc ñònh thieát dieän cuûa hình choùp vôùi (P).

b) Tính dieän tích thieát dieän theo a, b vaø x = AI.

HD: a) Xeùt 2 tröôøng hôïp: I ∈ OA, I ∈ OC . Thieát dieän laø tam giaùc ñeàu.

b) 

1. Cho hai maët phaúng song song (P) vaø (Q). Tam giaùc ABC naèm trong (P) vaø ñoaïn thaúng MN naèm trong (Q).

a) Tìm giao tuyeán cuûa (MAB) vaø (Q); cuûa (NAC) vaø (Q).

b) Tìm giao tuyeán cuûa (MAB) vaø (NAC).

1. Töø boán ñænh cuûa hình bình haønh ABCD veõ boán nöûa ñöôøng thaúng song song cuøng chieàu Ax, By, Cz, Dt khoâng naèm trong (ABCD). Moät maët phaúng (P) caét boán nöûa ñöôøng thaúng taïi A′, B′, C′, D′.

a) Chöùng minh (Ax,By) // (Cz,Dt).

b) Chöùng minh A′B′C′D′ laø hình bình haønh.

c) Chöùng minh: AA′ + CC′ = BB′ + DD′.

1. Cho töù dieän ABCD. Goïi G1, G2, G3 laàn löôït laø troïng taâm caùc tam giaùc ABC, ACD, ADB.

a) Chöùng minh (G1G2G3) // (BCD).

b) Tìm thieát dieän cuûa töù dieän ABCD vôùi mp(G1G2G3). Tính dieän tích thieát dieän khi bieát dieän tích tam giaùc BCD laø S.

c) M laø ñieåm di ñoäng beân trong töù dieän sao cho G1M luoân song song vôùi mp(ACD). Tìm taäp hôïp nhöõng ñieåm M.

HD: b) 

1. Cho laêng truï ABC.A′B′C′. Goïi H laø trung ñieåm cuûa A′B′.

a) Chöùng minh CB′ // (AHC′).

b) Tìm giao ñieåm cuûa AC′ vôùi (BCH).

c) Maët phaúng (P) qua trung ñieåm cuûa CC′ vaø song song vôùi AH vaø CB′. Xaùc ñònh thieát dieän vaø tæ soá maø caùc ñænh cuûa thieát dieän chia caïnh töông öùng cuûa laêng truï.

HD: c) M, N, P, Q, R theo thöù töï chia caùc ñoaïn CC′, B′C′, A′B′, AB, AC theo caùc tæ soá 1, 1, 3, , 1.

1. Cho hình hoäp ABCD.A′B′C′D′.

a) Chöùng minh hai maët phaúng (BDA′) vaø (B′D′C) song song.

b) Chöùng minh ñöôøng cheùo AC′ ñi qua caùc troïng taâm G1, G2 cuûa 2 tam giaùc BDA′, B′D′C. Chöùng minh G1, G2 chia ñoaïn AC′ laøm ba phaàn baèng nhau.

c) Xaùc ñònh thieát dieän cuûa hình hoäp caét bôûi mp(A′B′G2). Thieát dieän laø hình gì?

HD: c) Hình bình haønh.

1. Cho hình laäp phöông ABCD.A′B′C′D′ caïnh a. Treân AB, CC′, C′D′, AA′ laàn löôït laáy caùc ñieåm M, N, P, Q sao cho AM = C′N = C′P = AQ = x (0 ≤ x ≤ a).

a) Chöùng minh boán ñieåm M, N, P, Q ñoàng phaúng vaø MP, NQ caét nhau taïi 1 ñieåm coá ñònh.

b) Chöùng minh mp(MNPQ) luoân chöùa 1 ñöôøng thaúng coá ñònh.

Tìm x ñeå (MNPQ) // (A′BC′).

c) Döïng thieát dieän cuûa hình laäp phöông caét bôûi (MNPQ). Thieát dieän coù ñaëc ñieåm gì? Tính giaù trò lôùn nhaát vaø nhoû nhaát cuûa chu vi thieát dieän.

HD: a) MP vaø NQ caét nhau taïi taâm O cuûa hình laäp phöông.

b) (MNPQ) ñi qua trung ñieåm R, S cuûa BC vaø A′D′. x = .

c) Thieát dieän laø luïc giaùc MRNPSQ coù taâm ñoái xöùng laø O.

Chu vi nhoû nhaát: 3a; chu vi lôùn nhaát: 2a(+ 1).

1. Cho laêng truï ABC.A′B′C′.

a) Tìm giao tuyeán cuûa (AB′C′) vaø (BA′C′).

b) Goïi M, N laàn löôït laø 2 ñieåm baát kì treân AA′ vaø BC. Tìm giao ñieåm cuûa B′C′ vôùi maët phaúng (AA′N) vaø giao ñieåm cuûa MN vôùi mp(AB′C′).

1. Cho laêng truï ABC.A′B′C′. Chöùng minh raèng caùc maët phaúng (ABC′), (BCA′) vaø (CAB′) coù moät ñieåm chung O ôû treân ñoaïn GG′ noái troïng taâm ΔABC vaø troïng taâm ΔA′B′C′. Tính . *HD: *

**BAØI TAÄP OÂN**

1. Cho töù dieän ABCD coù AB = 2a, tam giaùc BCD vuoâng taïi C coù BD = 2a, BC = a. Goïi E laø trung ñieåm cuûa BD. Cho bieát .

a) Tính 2AC2 – AD2 theo a.

b) (P) laø 1 maët phaúng song song vôùi AB vaø CE, caét caùc caïnh BC, BD, AE, AC theo thöù töï taïi M, N, P, Q. Tính dieän tích töù giaùc MNPQ theo a vaø x = BM (0 < x < a). Xaùc ñònh x ñeå dieän tích aáy lôùn nhaát.

c) Tìm x ñeå toång bình phöông caùc ñöôøng cheùo cuûa MNPQ laø nhoû nhaát.

d) Goïi O laø giao ñieåm cuûa MP vaø NQ. Tìm (P) ñeå OA2 + OB2 + OC2 + OD2  nhoû nhaát.

HD: a) Goïi F laø trung ñieåm cuûa AD.

Xeùt ⇒ 2AC2 – AD2 = 6a2 hoaëc –2a2.

b) S = x(a – x) c) x = 

d) OA2 + OB2 + OC2 + OD2 = 4OG2 + GA2 + GB2 + GC2 + GD2.

O di ñoäng treân ñoaïn IJ noái trung ñieåm cuûa AB vaø CE. Toång nhoû nhaát khi O laø hình chieáu cuûa G leân IJ ( G laø troïng taâm töù dieän ABCD).

1. Cho töù dieän ñeàu ABCD caïnh a. Goïi I, J laø troïng taâm caùc tam giaùc ABC vaø DBC. Maët phaúng (P) qua IJ caét caùc caïnh AB, AC, DC, DB taïi M, N, P, Q.

a) Chöùng minh MN, PQ, BC ñoàng qui hoaëc song song vaø MNPQ thöôøng laø hình thang caân.

b) Ñaët AM = x, AN = y. CMR: a(x + y) = 3xy. Suy ra: .

c) Tính dieän tích töù giaùc MNPQ theo a vaø s = x + y.

HD: b) SΔAMN = SAMI + SANI c) .

1. Cho hình choùp S.ABCD. Töù giaùc ñaùy coù AB vaø CD caét nhau taïi E, AD vaø BC caét nhau taïi F, AC vaø BD caét nhau taïi G. Maët phaúng (P) caét SA, SB, SC laàn löôït taïi A′, B′, C′.

a) Tìm giao ñieåm D′ cuûa SD vôùi (P).

b) Tìm ñieàu kieän cuûa (P) ñeå A′B′ // C′D′.

c) Vôùi ñieàu kieän naøo cuûa (P) thì A′B′C′D′ laø hình bình haønh? CMR khi ñoù:



d) Tính dieän tích töù giaùc A′B′C′D′.

HD: b) (P) // SE.

c) (P) // (SEF). Goïi G′ = A′C′∩B′D′. Chöùng minh: 

d) SA′B′C′D′ = .

1. Cho maët phaúng (P) vaø hai ñöôøng thaúng cheùo nhau d1, d2 caét (P) taïi A vaø B. Ñöôøng thaúng (Δ) thay ñoåi luoân song song vôùi (P), caét d1 taïi M, d2 taïi N. Ñöôøng thaúng qua N vaø song song d1 caét (P) taïi N′.

a) Töù giaùc AMNN′ laø hình gì? Tìm taäp hôïp ñieåm N′.

b) Xaùc ñònh vò trí cuûa (Δ) ñeå MN coù ñoä daøi nhoû nhaát.

c) Goïi O laø trung ñieåm cuûa AB, I laø trung ñieåm cuûa MN. Chöùng minh OI laø ñöôøng thaúng coá ñònh khi M di ñoäng.

d) Tam giaùc BMN vuoâng caân ñænh B vaø BM = a. Tính dieän tích thieát dieän cuûa hình choùp B.AMNN′ vôùi maët phaúng qua O vaø song song vôùi maët phaúng (BMN).

HD: a) Hình bình haønh. Taäp hôïp caùc ñieåm N′ laø d3, giao tuyeán cuûa (P) vôùi maët phaúng qua d2 vaø song song vôùi d1.

b) MN nhoû nhaát khi AN′ vuoâng goùc d3 taïi N′.

d) 

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy laø hình bình haønh. M vaø P laø hai ñieåm laàn löôït di ñoäng treân AD vaø SC sao cho:  (x > 0).

a) CMR: MP luoân song song vôùi moät maët phaúng coá ñònh (P).

b) Tìm giao ñieåm I cuûa (SBD) vôùi MP.

c) Maët phaúng qua M vaø song song vôùi (P) caét hình choùp SABCD theo moät thieát dieän vaø caét BD taïi J. Chöùng minh IJ coù phöông khoâng ñoåi. Tìm x ñeå PJ song song vôùi (SAD).

d) Tìm x ñeå dieän tích thieát dieän baèng k laàn dieän tích ΔSAB (k > 0 cho tröôùc).

HD: a) Maët phaúng (SAB). c) Phöông cuûa SB; x = 1.

d) x =  (0 < k < 1).

1. Cho hình choùp S.ABCD, coù ñaùy ABCD laø hình vuoâng caïnh a, taâm O. SA = SB = SC = SD = a. Goïi M laø moät ñieåm treân ñoaïn AO. (P) laø maët phaúng qua M vaø song song vôùi AD vaø SO. Ñaët  (0 < k < 1).

a) Chöùng minh thieát dieän cuûa hình choùp vôùi (P) laø hình thang caân.

b) Tính caùc caïnh cuûa thieát dieän theo a vaø k.

c) Tìm k ñeå thieát dieän treân ngoaïi tieáp ñöôïc 1 ñöôøng troøn. Khi ñoù haõy tính dieän tích thieát dieän theo a.

HD: b) a; (1 – k)a;  c) k=

1. Cho laêng truï ABC.A′B′C′. Goïi M, N, P laø 3 ñieåm laàn löôït naèm treân 3 ñoaïn AB′, AC′, B′C sao cho .

a) Tìm x ñeå (MNP) // (A′BC′). Khi ñoù haõy tính dieän tích cuûa thieát dieän caét bôûi mp(MNP), bieát tam giaùc A′BC′ laø tam giaùc ñeàu caïnh a.

b) Tìm taäp hôïp trung ñieåm cuûa NP khi x thay ñoåi.

HD: a) x =  b) Ñoaïn thaúng noái trung ñieåm cuûa CC′ vaø AB.

1. Cho laêng truï ABCD.A′B′C′D′, coù ñaùy laø hình thang vôùi AD = CD = BC = a, AB = 2a Maët phaúng (P) qua A caét caùc caïnh BB′, CC′, DD′ laàn löôït taïi M, N, P.

a) Töù giaùc AMNP laø hình gì? So saùnh AM vaø NP.

b) Tìm taäp hôïp giao ñieåm cuûa AN vaø MP khi (P) di ñoäng.

c) CMR: BM + 2DP = 2CN.

HD: a) Hình thang. AM = 2NP. b) Ñoaïn thaúng song song vôùi caïnh beân.

c) DP = .

BDRTC045