**CHƯƠNG III**

**NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG**

# II. TÍCH PHÂN

**1. Khái niệm tích phân**

 • Cho hàm số *f* liên tục trên K và *a, b* ∈ *K*. Nếu *F* là một nguyên hàm của *f* trên K thì:

 ***F(b) – F(a)*** đgl **tích phân của *f* từ *a* đến *b*** và kí hiệu là .

 

 • Đối với biến số lấy tích phân, ta có thể chọn bất kì một chữ khác thay cho *x*, tức là:

 

 • **Ý nghĩa hình học**: Nếu hàm số *y = f(x)* liên tục và không âm trên đoạn [a; b] thì diện tích *S* của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của *y = f(x)*, trục Ox và hai đường thẳng *x = a, x = b* là: 

**2. Tính chất của tích phân**

 •  •  •  (*k: const)*

 •  • 

 • Nếu *f(x) ≥ 0* trên [a; b] thì 

 • Nếu *f(x) ≥ g(x)* trên [a; b] thì 

**3. Phương pháp tính tích phân**

 **a) Phương pháp đổi biến số**



 trong đó: *u = u(x)* có đạo hàm liên tục trên *K*, *y = f(u)* liên tục và hàm hợp *f[u(x)]* xác định trên *K*, *a, b* ∈ *K.*

 **b) Phương pháp tích phân từng phần**

 Nếu *u, v* là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên *K*, *a, b ∈ K*  thì:

 

 ***Chú ý:*** *– Cần xem lại các phương pháp tìm nguyên hàm.*

 *– Trong phương pháp tích phân từng phần, ta cần chọn sao cho*  *dễ tính hơn* .

**VẤN ĐỀ 1: Tính tích phân bằng cách sử dụng bảng nguyên hàm**

 *Biến đổi biểu thức hàm số để sử dụng được bảng các nguyên hàm cơ bản. Tìm nguyên hàm F(x) của f(x), rồi sử dụng trực tiếp định nghĩa tích phân:*



***Chú ý:*** *Để sử dụng phương pháp này cần phải:*

 *– Nắm vững bảng các nguyên hàm.*

 *– Nắm vững phép tính vi phân.*

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

**VẤN ĐỀ 2: Tính tích phân****bằng phương pháp đổi biến số**

 ***Dạng 1:*** *Giả sử ta cần tính .*

 *Nếu viết được g(x) dưới dạng:  thì *

***Dạng 2:*** *Giả sử ta cần tính .*

 *Đặt x = x(t) (t ∈ K) và a, b ∈ K thoả mãn α = x(a), β = x(b)*

 *thì  *

 *Dạng 2 thường gặp ở các trường hợp sau:*

|  |  |
| --- | --- |
| ***f(x) có chứa*** | ***Cách đổi biến*** |
|  | *hoặc*  |
|  | *hoặc*  |
|  | *hoặc*  |

1. Tính các tích phân sau *(đổi biến số dạng 1)*:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

 n)  o)  p) 

1. Tính các tích phân sau *(đổi biến số dạng 2)*:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

**VẤN ĐỀ 3: Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần**

 *Với P(x) là đa thức của x, ta thường gặp các dạng sau:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| *u* | *P(x)* | *P(x)* | *P(x)* | *lnx* |
| *dv* |  |  |  | *P(x)* |

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

 o)  p)  q) 

**VẤN ĐỀ 4: Tính tích phân các hàm số có chứa giá trị tuyệt đối**

*Để tính tích phân của hàm số f(x) có chứa dấu GTTĐ, ta cần xét dấu f(x) rồi sử dụng công thức phân đoạn để tính tích phân trên từng đoạn nhỏ.*

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

**VẤN ĐỀ 5: Tính tích phân các hàm số hữu tỉ**

 *Xem lại cách tìm nguyên hàm của các hàm số hữu tỉ.*

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

**VẤN ĐỀ 6: Tính tích phân các hàm số vô tỉ**

 *Xem lại cách tìm nguyên hàm của các hàm số vô tỉ.*

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

 n)  o)  p) 

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

**VẤN ĐỀ 7: Tính tích phân các hàm số lượng giác**

 *Xem lại cách tìm nguyên hàm của các hàm số lượng giác.*

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

 n)  o)  p) 

 q)  r)  s) 

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

 n)  o)  p) 

**VẤN ĐỀ 8: Tính tích phân các hàm số mũ và logarit**

 *Sử dụng các phép toán về luỹ thừa và logarit. Xem lại các phương pháp tìm nguyên hàm.*

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

1. Tính các tích phân sau:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

**VẤN ĐỀ 9: Một số tích phân đặc biệt**

***Dạng 1. Tích phân của hàm số chẵn, hàm số lẻ***

 *• Nếu hàm số f(x) liên tục và là hàm số lẻ trên [-a; a] thì *

 *• Nếu hàm số f(x) liên tục và là hàm số chẵn trên [-a; a] thì *

 *Vì các tính chất này không có trong phần lý thuyết của SGK nên khi tính các tích phân có dạng này ta có thể chứng minh như sau:*

 *Bước 1: Phân tích  *

 *Bước 2: Tính tích phân  bằng phương pháp đổi biến. Đặt* ***t = – x****.*

 *– Nếu f(x) là hàm số lẻ thì J = –K ⇒ I = J + K = 0*

 *– Nếu f(x) là hàm số chẵn thì J = K ⇒ I = J + K = 2K*

***Dạng 2. Nếu f(x) liên tục và là hàm chẵn trên R thì:***

 * (với α ∈ R+ và a > 0)*

 *Để chứng minh tính chất này, ta cũng làm tương tự như trên.*

 * *

 *Để tính J ta cũng đặt:* ***t = –x****.*

***Dạng 3. Nếu f(x) liên tục trên  thì*** **

 *Để chứng minh tính chất này ta đặt: *

***Dạng 4. Nếu f(x) liên tục và  hoặc ***

 ***thì đặt: t = a + b – x***

 *Đặc biệt, nếu a + b = π thì đặt t = π – x*

 *nếu a + b = 2π thì đặt t = 2π – x*

***Dạng 5. Tính tích phân bằng cách sử dụng nguyên hàm phụ***

 *Để xác định nguyên hàm của hàm số f(x) ta cần tìm một hàm g(x) sao cho nguyên hàm của các hàm số f(x) ± g(x) dễ xác định hơn so với f(x). Từ đó suy ra nguyên hàm của f(x). Ta thực hiện các bước như sau:*

 *Bước 1: Tìm hàm g(x).*

 *Bước 2: Xác định nguyên hàm của các hàm số f(x) ± g(x), tức là:*

 **

 *Bước 3: Từ hệ (\*), ta suy ra  là nguyên hàm của f(x).*

1. Tính các tích phân sau *(dạng 1)*:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

1. Tính các tích phân sau *(dạng 2)*:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

1. Tính các tích phân sau *(dạng 3)*:

 a) (*n ∈ N\*)* b)  c) 

 d)  e)  f) 

1. Tính các tích phân sau *(dạng 4)*:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

1. Tính các tích phân sau *(dạng 5)*:

 a)  b)  c) 

 d)  e)  f) 

 g)  h)  i) 

 k)  l)  m) 

 n)  o) 

**VẤN ĐỀ 10: Thiết lập công thức truy hồi**

*Giả sử cần tính tích phân  (n ∈ N) phụ thuộc vào số nguyên dương n. Ta thường gặp một số yêu cầu sau:*

 *• Thiết lập một công thức truy hồi, tức là biểu diễn In theo các In-k (1 ≤ k ≤ n).*

 *• Chứng minh một công thức truy hồi cho trước.*

 *• Tính một giá trị  cụ thể nào đó.*

1. Lập công thức truy hồi cho các tích phân sau:

 a)  • *Đặt *

b)  • *Đặt *

 c)  *• Phân tích: *

 d)  *• Đặt *

  *• Đặt *

 e)  *• Đặt *

f)  *• Đặt *

 g)  *• Đặt  → Đặt *

h)  *• Phân tích *

 *Tính . Đặt *

 i)  *• Đặt *

 k)  *• Phân tích  → Đặt *