**CHƯƠNG III**

**PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**

# I. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

**1. Định nghĩa và các phép toán**

 • Định nghĩa, tính chất, các phép toán về vectơ trong không gian được xây dựng hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng.

 • Lưu ý:

 + **Qui tắc ba điểm:** Cho ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có: 

 + **Qui tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành ABCD, ta có: 

 + **Qui tắc hình hộp:** Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′, ta có: 

 + **Hê thức trung điểm đoạn thẳng:** Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB, O tuỳ ý.

 Ta có: ; 

 + **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, O tuỳ ý.

 Ta có: 

 + **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện ABCD, O tuỳ ý.

 Ta có: 

 + **Điều kiện hai vectơ cùng phương:** 

 + **Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k** (k ≠ 1), O tuỳ ý.

 Ta có: 

**2. Sự đồng phẳng của ba vectơ**

 • Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

 • **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:** Cho ba vectơ , trong đó  không cùng phương. Khi đó: đồng phẳng ⇔ ∃! m, n ∈ R: 

 • Cho ba vectơ  không đồng phẳng,  tuỳ ý.

 Khi đó: ∃! m, n, p ∈ R: 

**3. Tích vô hướng của hai vectơ**

• **Góc giữa hai vectơ trong không gian:**

 

 • **Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:**

 + Cho . Khi đó: 

 + Với . Qui ước: 

 + 

 + 

# II. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

**1. Hệ tọa độ Đêcac vuông góc trong không gian:**

 Cho ba trục Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O. Gọi  là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz. Hệ ba trục như vậy gọi là hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz hoặc đơn giản là hệ tọa độ Oxyz.

 *Chú ý*:  và .

**2. Tọa độ của vectơ:**

 **a) Định nghĩa:** 

 **b) Tính chất:** Cho 

 • 

 • 

 • 

 • 

 •  cùng phương  ⇔ 

 

 •  • 

 •  • 

 •  *(với* *)*

**3. Tọa độ của điểm:**

 **a) Định nghĩa:**  *(x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)*

***Chú ý:*** *• M ∈ (Oxy) ⇔ z = 0; M ∈ (Oyz) ⇔ x = 0; M ∈ (Oxz) ⇔ y = 0*

 ***•*** *M ∈ Ox ⇔ y = z = 0; M ∈ Oy ⇔ x = z = 0; M ∈ Oz ⇔ x = y = 0*

 **b) Tính chất:** Cho 

 • **** • 

 • Toạ độ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số *k* *(k≠1):* 

 • Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: 

 • Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC:

 

 • Toạ độ trọng tâm G của tứ diện ABCD:

 

**4. Tích có hướng của hai vectơ:** *(Chương trình nâng cao)*

 **a) Định nghĩa: Cho** , .



 ***Chú ý:*** *Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.*

 **b) Tính chất:**

 •  • 

 •  •  cùng phương 

 **c) Ứng dụng của tích có hướng:**

 • ***Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ:***  và  đồng phẳng ⇔ 

 • ***Diện tích hình bình hành ABCD:*** **

 *•* ***Diện tích tam giác ABC:***

 *•* ***Thể tích khối hộp ABCD.A′B′C′D′:***

 *•* ***Thể tích tứ diện******ABCD:***

    

***Chú ý:***

 ***– Tích vô hướng*** *của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.*

 *–* ***Tích có hướng*** *của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.*

 **

**5. Phương trình mặt cầu:**

 • Phương trình mặt cầu (S) tâm *I(a; b; c)*, bán kính *R*:

 

 • Phương trình  với  là phương trình mặt cầu tâm *I(–a; –b; –c)* và bán kính *R = .*

**VẤN ĐỀ 1: Các phép toán về toạ độ của vectơ và của điểm**

 *– Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.*

 *– Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.*

1. Viết tọa độ của các vectơ sau đây:

 ; ; ; 

1. Viết dưới dạng  mỗi vectơ sau đây:

 ; ; ; 

1. Cho: . Tìm toạ độ của các vectơ  với:

a)  b)  c) 

d)  e)  f) 

1. Tìm tọa độ của vectơ, biết rằng:

a)  với  b)  với 

c)  với , 

1. Cho .

a) Tìm *y* và *z* để  cùng phương với .

b) Tìm toạ độ của vectơ , biết rằng  ngược hướng và .

1. Cho ba vectơ . Tìm:

a)  b)  c) 

 d)  e) 

1. Tính góc giữa hai vectơ  và :

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

1. Tìm vectơ , biết rằng:

a)  b) 

c)  d) 

e) 

1. Cho hai vectơ . Tìm *m* để:

a)  b)

c) 

1. Cho hai vectơ . Tính *X, Y*  khi biết:

a)  b) 

c)  d) 

1. Cho ba vectơ . Tìm *m, n* để :

a) 

b) 

c) 

1. Xét sự đồng phẳng của ba vectơ  trong mỗi trường hợp sau đây:

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

g)  h) 

1. Tìm *m* để 3 vectơ  đồng phẳng:

a) 

b) 

c) 

d) 

1. Cho các vectơ . Chứng minh ba vectơ  không đồng phẳng. Biểu diễn vectơ  theo các vectơ :

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

1. Chứng tỏ bốn vectơ  đồng phẳng:

a) 

b) 

1. Cho ba vectơ  không đồng phẳng và vectơ . Chứng minh bộ ba vectơ sau không đồng phẳng:

a)  (với *m, n ≠ 0)* b)  (với *m, n ≠ 0)*

c) , (với *m, n, p ≠ 0)* d) , (với *m, n, p ≠ 0)*

e) , (với *m, n, p ≠ 0)*

**VẤN ĐỀ 2: Xác định điểm trong không gian. Chứng minh tính chất hình học.**

**Diện tích – Thể tích.**

 *– Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.*

 *– Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.*

 *– Công thức xác định toạ độ của các điểm đặc biệt.*

 *– Tính chất hình học của các điểm đặc biệt:*

 *• A, B, C thẳng hàng ⇔  cùng phương ⇔  ⇔ *

 *• ABCD là hình bình hành ⇔ *

 *• Cho ΔABC có các chân E, F của các đường phân giác trong và ngoài của góc A của ΔABC trên BC. Ta có: , *

 *• A, B, C, D không đồng phẳng ⇔  không đồng phẳng ⇔ *

1. Cho điểm M. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M:

 • Trên các mặt phẳng tọa độ: Oxy, Oxz, Oyz • Trên các trục tọa độ: Ox, Oy, Oz

 a) b)  c)  d) 

 e)  f)  g)  h) 

1. Cho điểm M. Tìm tọa độ của điểm M′ đối xứng với điểm M:

 • Qua gốc toạ độ • Qua mp(Oxy) • Qua trục Oy

 a)  b)  c)  d) 

 e)  f)  g)  h) 

1. Xét tính thẳng hàng của các bộ ba điểm sau:

 a)  b) 

 c)  d) 

1. Cho ba điểm A, B, C.

 • Chứng tỏ ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.

 • Tìm toạ độ trọng tâm G của ΔABC.

 • Xác định điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

 • Xác định toạ độ các chân E, F của các đường phân giác trong và ngoài của góc A của ΔABC trên BC. Tính độ dài các đoạn phân giác đó.

 • Tính số đo các góc trong ΔABC.

 • Tính diện tích ΔABC. Từ đó suy ra độ dài đường cao AH của ΔABC.

 a)  b) 

 c)  d) 

 e)  f) 

 g)  h) 

1. Trên trục Oy *(Ox)*, tìm điểm cách đều hai điểm:

a) ,  b)  c) 

d)  e)  f) 

1. Trên mặt phẳng Oxy *(Oxz, Oyz)*, tìm điểm cách đều ba điểm:

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

1. Cho hai điểm A, B. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng Oyz *(Oxz, Oxy)* tại điểm M.

 • Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số nào ? • Tìm tọa độ điểm M.

a)  b)  c) 

d)  e)  f) 

1. Cho bốn điểm A, B, C, D.

 • Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

 • Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện ABCD.

 • Tính góc tạo bởi các cạnh đối diện của tứ diện ABCD.

 • Tính thể tích của khối tứ diện ABCD.

 • Tính diện tích tam giác BCD, từ đó suy ra độ dài đường cao của tứ diện vẽ từ A.

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

g)  h) 

i)  k) 

1. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

 • Tìm toạ độ các đỉnh còn lại.

 • Tính thể tích khối hộp.

 a)  b)

c)  d) 

1. Cho bốn điểm S(3; 1; –2), A(5; 3; 1), B(2; 3; –4), C(1; 2; 0).

 a) Chứng minh SA ⊥ (SBC), SB ⊥ (SAC), SC ⊥ (SAB).

 b) Chứng minh S.ABC là một hình chóp đều.

 c) Xác định toạ độ chân đường cao H của hình chóp. Suy ra độ dài đường cao SH.

1. Cho bốn điểm S(1; 2; 3), A(2; 2; 3), B(1; 3; 3), C(1; 2; 4).

 a) Chứng minh SA ⊥ (SBC), SB ⊥ (SAC), SC ⊥ (SAB).

 b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh SMNP là tứ diện đều.

 c) Vẽ SH ⊥ (ABC). Gọi S′ là điểm đối xứng của H qua S. Chứng minh S′ABC là tứ diện đều.

1. Cho hình hộp chữ nhật OABC.DEFG. Gọi I là tâm của hình hộp.

a) Phân tích các vectơ  theo các vectơ .

b) Phân tích vectơ  theo các vectơ .

1. Cho hình lập phương ABCD.EFGH.

a) Phân tích vectơ  theo các vectơ .

b) Phân tích vectơ  theo các vectơ .

1. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BB′. Chứng minh rằng MN ⊥ A′C.
2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với cạnh bằng 1. Trên các cạnh BB′, CD, A′D′ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho B′M = CN = D′P = *x (0 < x < 1)*. Chứng minh AC′ vuông góc với mặt phẳng (MNP).

**VẤN ĐỀ 3: Phương trình mặt cầu**

 *Để viết phương trình mặt cầu (S), ta cần xác định* ***tâm I*** *và* ***bán kính R*** *của mặt cầu.*

**Dạng 1:** *(S)* có tâm *I(a; b; c)* và bán kính *R:*

 ***(S):*** 

**Dạng 2:***(S)* có tâm *I(a; b; c)* và đi qua điểm A:

 *Khi đó bán kính R = IA.*

**Dạng 3:** *(S)* nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính:

 *– Tâm I là trung điểm của đoạn thẳng AB: .*

 *– Bán kính R = IA = .*

**Dạng 4:** *(S)* đi qua bốn điểm A, B, C, D *(mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD):*

 *– Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng:*  (\*).

 *– Thay lần lượt toạ độ của các điểm A, B, C, D vào (\*), ta được 4 phương trình.*

 *– Giải hệ phương trình đó, ta tìm được a, b, c, d ⇒ Phương trình mặt cầu (S).*

**Dạng 5:** *(S)* đi qua ba điểm A, B, C và có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) cho trước:

 *Giải tương tự như dạng 4.*

**Dạng 6:** *(S)* có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu *(T)* cho trước:

 *– Xác định tâm J và bán kính R′ của mặt cầu (T).*

 *– Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính R của mặt cầu (S).*

 *(Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài)*

 ***Chú ý:*** *Với phương trình mặt cầu (S):*

 với 

 *thì (S) có* tâm *I(–a; –b; –c)* và bán kính *R = .*

1. Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu sau:

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

g)  h) 

i)  k) 

1. Xác định *m, t, α, …* để phương trình sau xác định một mặt cầu, tìm tâm và bán kính của các mặt cầu đó:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

1. Viết phương trình mặt cầu có tâm I và bán kính R:

a)  b)  c)  d) 

1. Viết phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A:

a)  b)  c) 

d)  e) 

1. Viết phương trình mặt cầu có đường kính AB, với:

a)  b)  c) 

d)  e)  f) 

1. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, với:

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

1. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm nằm trong mặt phẳng (P) cho trước, với:

a)  b) 

1. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T), với:

a)  b) 

**VẤN ĐỀ 4: Vị trí tương đối giữa hai mặt cầu mặt cầu**

 *Cho hai mặt cầu S1(I1, R1) và S2(I2, R2).*

 *•  ⇔ (S1), (S2) trong nhau •  ⇔ (S1), (S2) ngoài nhau*

 *•  ⇔ (S1), (S2) tiếp xúc trong • ⇔ (S1), (S2) tiếp xúc ngoài*

 *•  ⇔ (S1), (S2) cắt nhau theo một đường tròn.*

1. Xét vị trí tương đối của hai mặt cầu:

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

1. Biện luận theo *m* vị trí tương đối của hai mặt cầu:

a)  b) 

c)  d) 

**VẤN ĐỀ 5: Tập hợp điểm là mặt cầu – Tập hợp tâm mặt cầu**

**1. Tập hợp điểm là mặt cầu**

 *Giả sử tìm tập hợp điểm M thoả tính chất (P) nào đó.*

 *– Tìm hệ thức giữa các toạ độ x, y, z của điểm M. Chẳng hạn có dạng:*

 

 *hoặc:*  

 *–* *Tìm giới hạn quĩ tích (nếu có).*

**2. Tìm tập hợp tâm mặt cầu**

 *– Tìm toạ độ của tâm I, chẳng hạn:  (\*)*

 *– Khử t trong (\*) ta có phương trình tập hợp điểm.*

 *– Tìm giới hạn quĩ tích (nếu có).*

1. Cho hai điểm A(1; 2; 1), B(3; 1; –2). Tìm tập hợp các điểm M(x; y; z) sao cho:

a)  b)  c) 

1. Cho hai điểm A(2; –3; –1), B(–4; 5; –3). Tìm tập hợp các điểm M(x; y; z) sao cho:

a)  b)  c) 

d) MA = MB e) 

1. Tìm tập hợp các tâm I của mặt cầu sau khi *m* thay đổi:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 