# III. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

**1. Vectơ pháp tuyến – Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng**

 • Vectơ  là VTPT của (α) nếu giá của  vuông góc với (α).

• Hai vectơ  không cùng phương là cặp VTCP của (α) nếu các giá của chúng song song hoặc nằm trên (α).

 ***Chú ý:*** *• Nếu  là một VTPT của (α) thì  (k ≠ 0) cũng là VTPT của (α).*

 *• Nếu*  *là một cặp VTCP của (α) thì  là một VTPT của (α).*

**2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng**

 

 • Nếu (α) có phương trình  thì  là một VTPT của (α).

 • Phương trình mặt phẳng đi qua  và có một VTPT  là:

 

**3. Các trường hợp riêng**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Các hệ số** | **Phương trình mặt phẳng (α)** | **Tính chất mặt phẳng (α)** |
| D = 0 |  | (α) đi qua gốc toạ độ O |
| A = 0 |  | (α) // Ox hoặc (α) ⊃ Ox |
| B = 0  |  | (α) // Oy hoặc (α) ⊃ Oy |
| C = 0 |  | (α) // Oz hoặc (α) ⊃ Oz |
| A = B = 0 |  | (α) // (Oxy) hoặc (α) ≡ (Oxy) |
| A = C = 0 |  | (α) // (Oxz) hoặc (α) ≡ (Oxz) |
| B = C = 0 |   | (α) // (Oyz) hoặc (α) ≡ (Oyz) |

 ***Chú ý:*** *• Nếu trong phương trình của (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.*

 *• Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn: *

 *(α) cắt các trục toạ độ tại các điểm (a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c)*

**4. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng**

 Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình: (α): 

 (β): 

 *• (α), (β) cắt nhau ⇔ *

 *• (α) // (β) ⇔  • (α) ≡ (β) ⇔ *

 *• (α) ⊥ (β) ⇔ *

**5. Khoảng cách từ điểm *M0(x0; y0; z0)* đến mặt phẳng *(α): Ax + By + Cz + D = 0***

 

**VẤN ĐỀ 1: Viết phương trình mặt phẳng**

 *Để lập phương trình mặt phẳng (α) ta cần xác định một* ***điểm*** *thuộc (α) và một* ***VTPT*** *của nó.*

**Dạng 1:** *(α)* đi qua điểm  có VTPT :

 *(α):* ****

**Dạng 2:** *(α)* đi qua điểm  có cặp VTCP :

*Khi đó một VTPT của (α) là .*

**Dạng 3:** *(α)* đi qua điểm  và song song với mặt phẳng *(β): Ax + By + Cz + D = 0*:

*(α):* ****

**Dạng 4:** *(α)* đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C:

 *Khi đó ta có thể xác định một VTPT của (α) là: *

**Dạng 5:** *(α)* đi qua một điểm M và một đường thẳng (d) không chứa M:

 *– Trên (d) lấy điểm A và VTCP .*

 *– Một VTPT của (α) là: *

**Dạng 6:** *(α)* đi qua một điểm M và vuông góc với một đường thẳng (d):

 *VTCP  của đường thẳng (d) là một VTPT của (α).*

**Dạng 7:** *(α)* đi qua 2 đường thẳng cắt nhau d1, d2:

 *– Xác định các VTCP  của các đường thẳng d1, d2.*

 *– Một VTPT của (α) là: .*

 *– Lấy một điểm M thuộc d1 hoặc d2 ⇒ M ∈ (α).*

**Dạng 8:** *(α)* chứa đường thẳng d1 và song song với đường thẳng d2 *(d1, d2 chéo nhau)*:

 – *Xác định các VTCP  của các đường thẳng d1, d2.*

 *– Một VTPT của (α) là: .*

 *– Lấy một điểm M thuộc d1 ⇒ M ∈ (α).*

**Dạng 9:** *(α)* đi qua điểm M và song song với hai đường thẳng chéo nhau d1, d2:

 *– Xác định các VTCP  của các đường thẳng d1, d2.*

 *– Một VTPT của (α) là: .*

**Dạng 10:** *(α)* đi qua một đường thẳng (d) và vuông góc với một mặt phẳng (β):

 *– Xác định VTCP  của (d) và VTPT  của (β).*

 *– Một VTPT của (α)*  *là: .*

 *– Lấy một điểm M thuộc d ⇒ M ∈ (α).*

**Dạng 11:** *(α)* đi qua điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau (β), (γ):

 *– Xác định các VTPT  của (β) và (γ).*

 *– Một VTPT của (α)*  *là: .*

**Dạng 12:** *(α)* đi qua đường thẳng (d) cho trước và cách điểm M cho trước một khoảng k cho trước:

 – *Giả sử (α)* *có phương trình:* ***.***

 *– Lấy 2 điểm A, B ∈ (d) ⇒ A, B ∈ (α) (ta được hai phương trình (1), (2)).*

 *– Từ điều kiện khoảng cách , ta được phương trình (3).*

 *– Giải hệ phương trình (1), (2), (3) (bằng cách cho giá trị một ẩn, tìm các ẩn còn lại).*

**Dạng 13:** *(α)* là tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H:

 *– Giả sử mặt cẩu (S) có tâm I và bán kính R.*

 *– Một VTPT của (α) là: *

***Chú ý:*** *Để viết phương trình mặt phẳng cần nắm vững các cách xác định mặt phẳng đã học ở lớp 11.*

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và có VTPT  cho trước:

a)  b)  c) 

d)  e)  f) 

1. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB cho trước, với:

a)  b)  c) 

d)  e)  f) 

1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và có cặp VTCP  cho trước, với:

a)  b) 

c)  d) 

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và song song với mặt phẳng  cho trước, với:

a)  b) 

c)  d) 

 e)  f) 

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và lần lượt song song với các mặt phẳng toạ độ, với:

a)  b)  c)  d) 

 e)  f)  g)  h) 

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng cho trước, với:

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm B, C cho trước, với:

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (β) cho trước, với:

a)  b)  c) 

d) 

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng (β), (γ) cho trước, với:

a) 

b) 

c) 

d) 

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q) cho trước, với:

a) 

b) 

c) 

d) 

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q), đồng thời song song với mặt phẳng (R) cho trước, với:

a) 

b) 

c) 

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q), đồng thời vuông góc với mặt phẳng (R) cho trước, với:

a) 

b) 

c) 

d) 

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q), đồng thời cách điểm M cho trước một khoảng bằng *k*, với:

a) 

**VẤN ĐỀ 2: Vị trí tương đối của hai mặt phẳng**

1. Xét vị trí tương đối của các cặp mặt phẳng sau:

a)  b)  c) 

d)  e)  f) 

1. Xác định *m, n* để các cặp mặt phẳng sau: • song song • cắt nhau • trùng nhau

a)  b)  c) 

d)  e)  f) 

g)  h)  i) 

1. Xác định *m* để các cặp mặt phẳng sau vuông góc với nhau

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

**VẤN ĐỀ 3: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.**

**Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.**

**Hình chiếu của một điểm trên mặt phẳng . Điểm đối xứng của một điểm qua mặt phẳng.**

 *• Khoảng cách từ điểm M0(x0; y0; z0) đến mặt phẳng (α): Ax + By + Cz + D = 0*

 **

 *• Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*

***Chú ý:*** *Nếu hai mặt phẳng không song song thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.*

 *• Điểm H là hình chiếu của điểm M trên (P) ⇔ *

 *• Điểm M′ đối xứng với điểm M qua (P) ⇔ *

1. Cho mặt phẳng (P) và điểm M.

 • Tính khoảng cách từ M đến (P). • Tìm toạ độ hình chiếu H của M trên (P).

 • Tìm toạ độ điểm M′ đối xứng với M qua (P).

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

1. Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng:

a)  b)  c) 

d)  e)  f) 

1. Tìm tập hợp các điểm cách mặt phẳng một khoảng bằng *k* cho trước:

a)  b) 

c)  d) 

1. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng:

a)  b)  c) 

d)  e)  f) 

1. Tìm tập hợp các điểm có tỷ số các khoảng cách đến hai mặt phẳng bằng *k* cho trước:

a)  b)  c) 

1. Tìm điểm M trên trục *Ox* *(Oy, Oz)* cách đều điểm N và mặt phẳng (P):

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

1. Tìm điểm M trên trục *Ox* *(Oy, Oz)* cách đều hai mặt phẳng:

a)  b)  c) 

d)  e)  f) 

1. Tìm phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (Q) cho trước. Tính khoảng cách giữa (P) và (Q):

a) . b).

1. Tìm phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cách điểm A một khoảng *k* cho trước:

a)  b) 

1. Tìm phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) cách mặt phẳng (Q) một khoảng *k*:

a)  b) 

**VẤN ĐỀ 4: Góc giữa hai mặt phẳng**

 *Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình: (α): *

 *(β): *

 *Góc giữa (α), (β)* ***bằng*** *hoặc* ***bù*** *với góc giữa hai VTPT .*

 **

***Chú ý:*** *• . • *

1. Tính góc giữa hai mặt phẳng:

a)  b)  c) 

d)  e)  f) 

1. Tìm *m* để góc giữa hai mặt phẳng sau bằng α cho trước:

a)  b)  c) 

d) 

1. Cho tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi  lần lượt là các góc hợp bởi các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA) với mặt phẳng (ABC). Bằng phương pháp toạ độ, chứng minh rằng:

a) Tam giác ABC có ba góc nhọn b) 

**VẤN ĐỀ 5: Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu.**

**Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu**

 *Cho mặt phẳng (α):  và mặt cầu (S): *

 *• (α) và (S) không có điểm chung ⇔ *

 *• (α) tiếp xúc với (S) ⇔  (α) là tiếp diện*

 *Để tìm toạ độ tiếp điểm ta có thể thực hiện như sau:*

 *– Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của (S) và vuông góc với (α).*

 *– Tìm toạ độ giao điểm H của d và (α).*

 *H là tiếp điểm của (S) với (α).*

 *• (α) cắt (S) theo một đường tròn ⇔ *

 *Để xác định tâm H và bán kính r của đường tròn giao tuyến ta có thể thực hiện như sau:*

 *– Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của (S) và vuông góc với (α).*

 *– Tìm toạ độ giao điểm H của d và (α).*

 *H là tâm của đường tròn giao tuyến của (S) với (α).*

 *Bán kính r của đường tròn giao tuyến: *

1. Xét vị trí tương đối giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu (S):

a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

1. Biện luận theo *m*, vị trí tương đối giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu (S):

a) 

b) 

c) 

d) 

1. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) cho trước:

 a)  b) 

 c)  d) 

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) cho trước:

 a)  tại 

 b)  tại 

 c)  tại 

 d)  và song song với mặt phẳng .

 e)  và song song với mặt phẳng .

 f) và song song với mặt phẳng .

 g)  và chứa đường thẳng 

 h) Tiếp xúc với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD tại A với A(6; –2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; –1), D(4; 1; 0).

 i) Tiếp xúc với mặt cầu:  và song song với 2 đường thẳng: , .

**Bài tập ôn: Phương trình mặt phẳng**

1. Cho tứ diện ABCD.

 • Viết phương trình các mặt của tứ diện.

 • Viết phương trình mặt phẳng chứa một cạnh và song song với cạnh đối diện.

 • Viết phương trình mặt phẳng đi qua một đỉnh và song song với mặt đối diện.

 • Viết phương trình mặt phẳng đi qua cạnh AB và vuông góc với (BCD).

 • Viết phương trình mặt phẳng trung trực của các cạnh tứ diện.

 • Tìm toạ độ các điểm A′, B′, C′, D′ lần lượt là các điểm đối xứng với các điểm A, B, C, D qua các mặt đối diện.

 • Tính khoảng cách từ một đỉnh của tứ diện đến mặt đối diện.

 • Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD. Xác định tâm I và bán kính R của (S).

 • Viết phương trình các tiếp diện của (S) tại các đỉnh A, B, C, D của tứ diện.

 • Viết phương trình các tiếp diện của (S) song song với các mặt của tứ diện.

 a)  b) 

 c)  d) 

 e)  f) 

1. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) lần lượt cắt ba trục toạ độ tại các điểm: A(1; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; –3) và E(–2; 0; 0), F(0; 1; 0), G(0; 0; 1).

 a) Tìm phương trình tổng quát của (P) và (Q).

 b) Tính độ dài đường cao của hình chóp O.ABC.

 c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q).

1. Cho bốn điểm: A(1; 1; 1), B(3; 3; 1), C(3; 1; 3) và D(1; 3; 3).

 a) Chứng minh ABCD là một tứ diện đều.

 b) Chứng minh tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối đôi một vuông góc.

 c) Tìm phương trình tổng quát của các mặt phẳng (ABC), (ABD), (ACD), (BCD).

 d) Tính góc giữa các cặp mặt phẳng: (ABC) và (ABD), (BCD) và (ACD).