# V. GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

# BẰNG PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ

Để giải các bài toán hình không gian bằng phương pháp tọa độ ta thực hiện các bước sau:

**Bước 1:** ***Chọn hệ trục tọa độ Oxyz thích hợp***.

**Bước 2:** Dựa vào giả thiết bài toán xác định tọa độ các điểm có liên quan.

**Bước 3:** Sử dụng các kiến thức về tọa độ để giải quyết bài toán.

***Chú ý:*** *Thông thường ta dựa vào các yếu tố đường thẳng vuông góc với mặt phẳng để chọn hệ trục Oxyz sao cho dễ xác định toạ độ các điểm liên quan.*

**Ví dụ 1:**

|  |
| --- |
| Cho tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. H là hình chiếu của O trên (ABC).  1. Chứng minh DABC có ba góc nhọn.  2. Chứng minh H là trực tâm DABC.  3. Chứng minh .  4. Gọi .  Chứng minh |

***Giải:***

Chọn hệ trục Oxyz sao cho: O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) (a, b, c > 0)

**1. Chứng minh DABC có ba góc nhọn:**

**C**

B

A

x

z

y

H

O

Ta có: 

 nhọn

Tương tự:  nhọn.

Vậy DABC có ba góc nhọn.

**2. Chứng minh H là trực tâm DABC:**

Ta có phương trình mp (ABC):





⇒ Phương trình đường thẳng OH: 

Thay x, y, z vào phương trình mp(ABC): 









 H là trực tâm DABC.

**3. Chứng minh **

 



.

**4. Chứng minh cos2a + cos2b + cos2g = 1**

Nhận xét: 

Gọi 







Vậy: 

**Ví dụ 2:**

|  |
| --- |
| Cho tam giác đều ABC có đường cao AH = 2a. Gọi O là trung điểm AH. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O, lấy điểm S sao cho OS = 2a.  1. Tính cosin của góc ϕ tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).  2. Trên đoạn OH lấy điểm I. Đặt OI = m (0 < m < a). Mặt phẳng (a) qua I, vuông góc với AH cắt các cạnh AB, AC, SC, SB lần lượt tại M, N, P, Q.  a. Tính diện tích thiết diện MNPQ theo a và x.  b. Tìm m để diện tích MNPQ lớn nhất. |

***Giải:***

Gọi D là trung điểm AB

**z**

**S**

**E**

**A**

**D**

**x**

**M**

B

y

H

C

P

N

I

m

Q

O

a

j

2a



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho:





**1. Tính cosj:**

Vẽ  tại E  (vì 



Phương trình đường thẳng SA: 

Phương trình mp(BCE): 

Thay x, y, z vào phương trình (BCE), ta được: 

 



Vậy .

**2. Ta có: I(0; m; 0), **

 phương trình mp(MNPQ): y – m = 0

***a. Tính SMNPQ:***

Ta có:

; 

; 

Phương trình đường thẳng AB: 



Phương trình đường thẳng AC: 



Phương trình đường thẳng SB: 



Phương trình đường thẳng SC: 



⇒ 



***b/ Tìm m để (SMNPQ)max:***

Bảng xét dấu:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| m | –∞ |  | +∞ |
|  | –∞ |  | –∞ |



Vậy 

*Cách khác*: 



**Ví dụ 3:**

|  |
| --- |
| Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. OA= a, OB = b, OC = c.  1. Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp (S) của OABC. Tính bán kính r của (S).  2. Gọi M, N, P là trung điểm BC, CA, AB. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (OMN) và (OMP) vuông góc . |

***Giải:***

Chọn hệ trục Oxyz sao cho: O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)

**1. Tính r:**

Ta có: 

**C**

**z**

**y**

**x**

**B**

**A**

**O**

**a**

**b**

**P**

**c**

**M**

**N**





Vậy 

**2. Chứng minh** (OMN) ⊥ (OMP)

Ta có: 









**Ví dụ 4:**

|  |
| --- |
| Cho hình chữ nhật ABCD có AB= a, AD = 2a. Trên tia  lấy điểm S. Mặt phẳng (a) qua CD cắt SA, SB lần lượt tại K và L.  1. Cho SA = 2a, AK = k  a. Tính diện tích tứ giác CDKL. Tính k theo a để SCDKL lớn nhất, nhỏ nhất.  b. Chứng tỏ khoảng cách giữa hai đường thẳng KD và BC không đổi.  c. Tính k theo a để (a) chia hình chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.  2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SC, SD. Tìm quỹ tích giao điểm I của AN, BM khi S di động trên tia Az. |

***Giải:***

**1.** Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; 2a; 0), D(0; 2a; 0), S(0; 0; 2a)



**z**

S

B

x

C

y

D

N

M

K

L

a

2a

A

k

I

Phương trình



Phương trình đường thẳng SB: 



***a/ SCDKL = SDCKL + S*DCKD:**



Xét 

Bảng biến thiên:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | –∞ | 0 2a | | | +∞ |
| f/(k) |  |  | – |  |  |
| f(k) |  | 2a2 | |  |  |
|  |  |  |  | |  |

Vậy: 



***b/ d(KD, BC) *** = a (không đổi)

\* *Chú ý*: CD là đoạn vuông góc chung của KD và BC.

***c/ Tính k để ***

Ta có: 



**2. Quỹ tích I:**





⇒ Phương trình đường thẳng BM: 

Phương trình đường thẳng AN: 



Ta có: 

Vậy quỹ tích I là nửa đường thẳng  (trừ điểm D, do s > 0).

**Ví dụ 5:**

|  |
| --- |
| Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy  1. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.  2. Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.  3. Tìm a để tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp trùng nhau. |

***Giải:***

Ta có: AC = BD = 2a. Gọi SO là đường cao và SO= h.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho: O(0; 0; 0), A(a; 0; 0),S(0; 0; h)

**z**

**S**

**x**

**A**

****

**B**

**y**

**C**

**D**

**O**

**h**

**a**

**a**



**1. Tâm I và R của (S) ngoại tiếp chóp S.ABCD**

Do S.ABCD là hình chóp tứ giác đều nên 

Phương trình mặt cầu (S):



Mặt khác: 

 (a nhọn do DSAB cân tại S).

Vậy: 



**2. Tâm J và r của (S/) nội tiếp chóp S.ABCD:**

Ta có: 



Vậy: 

**3. Tìm a để I ≡ J**





Vậy 

**Ví dụ 6:**

|  |
| --- |
| Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là đáy hình chữ nhật với AB = a, AD = b, SA = 2a vuông góc với đáy. Trên cạnh SA lấy điểm M, AM = m (  1. Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì. Tính diện tích thiết diện?  2. Tìm vị trí M để diện tích thiết diện lớn nhất.  3. Tìm vị trí M để mặt phẳng (MBC) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. |

***Giải:***

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; b; 0), S(0; 0; 2a)

**a**

**b**

**D**

**y**

**x**

**B**

**S**

**z**

**2a**

**M**

**m**

**A**

**C**

**N**

.

Ta có: 



⇒ Phương trình mặt phẳng (MBC): 

Phương trình đường thẳng SD: 

Gọi 

**1. Hình tính và diện tích BCMN**

Ta có: 

 là hình thang vuông.



**2. Tìm vị trí M để SBCNM lớn nhất:**

Ta có: 





|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| m | –∞ 0   2a +∞ | | |
|  |  | – 0 + 0 – |  |
|  |  | ab |  |
|  |  |  | |





**3. Tìm vị trí M để **

Ta có: 



Yêu cầu bài toán  

Vậy 

**Ví dụ 7:**

|  |
| --- |
| Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh a.  1. Chứng minh . Tính góc j giữa (DA′C) và (ABB′A′).  2. Trên cạnh AD/, DB lấy điểm M, N thỏa AM = DN = k .  a. Chứng minh MN // (A/D/BC)  b. Tìm k để MNmin. Chứng tỏ khi đó MN là đoạn vuông góc chung của AD′, DB. |

***Giải:***

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a; 0), D(0; a; 0)

A/(0; 0; a), B/(a; 0; a), C/(a; a; a), D/(0; a; a)

AM = DN = k 

**z**

**A/**

**D/**

**B/**

**C/**

**A**

**D**

**B**

**C**

**k**

**y**

**z**

**a**

**N**

**M**

**k**

**1. Chứng minh **:

Ta có: 



Vậy 

***Cách khác*:** 

Tính j: 



.

Vậy 

**2. *a. Chứng minh MN // (A/D/BC):***



Ta có: 

)

***b/ Tìm k để MNmin:***

Ta có: 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| k | –∞ 0 | | +∞ |
| MN2 |  |  |  |



Khi  thì 



Vậy MN là đoạn vuông góc chung của AD/ và BD.

**Ví dụ 8:**

|  |
| --- |
| Cho hình lập phương ABCD.A/B/C/D/ cạnh a. Gọi M là trung điểm AB, N là tâm của hình vuông ADD/A/.  1. Tính bán kính R của mặt cầu (S) đi qua 4 điểm C, D/, M, N.  2. Tính bán kính r của đường tròn (C) là giao của (S) và mặt cầu (S/) đi qua A/, B/, C, D.  3. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (CMN) và hình lập phương. |

***Giải:***

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a; 0), D(0; a; 0)

A/(0; 0; a), B/(a; 0; a), C/(a; a; a), D/(0; a; a)



**1. Tính R:**

Phương trình mặt cầu (S): 

, suy ra:



**A/**

**D/**

**C/**

**B/**

**A**

**D**

**C**

**B**

**y**

**x**

**z**

**N**

**a**

**K**

**L**

**M**

(1) – (2) suy ra: a = g

(2) – (4) suy ra: d = a2



⇒ Phương trình mặt cầu (S): 



Vậy 

**2. Tính r:**

Phương trình mặt cầu (S′): 

**I/**

**R/**

**C**

**(C)**

**(S)**

**I**

**R**

**J**

**r**

 suy ra:





 và bán kính 

Dễ thấy C(a; a; 0) 

Gọi  là tâm của (S), (S/) và (C)



Ta có: 



 



**3. Tính S:**



⇒ Phương trình mặt phẳng (CMN):

Phương trình đường thẳng AA′: 

Phương trình đường thẳng DD′: 

Gọi 





**BÀI TẬP**

1. Cho tứ diện *OABC* có đáy *OBC* là tam giác vuông tại *O*, *OB*=*a*, *OC*=, (*a*>0) và đường cao *OA*=. Gọi *M* là trung điểm của cạnh *BC*. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *OM*.

*HD: Chọn hệ trục tọa độ sao cho: .*

*⇒*

1. Cho hình chóp *O.ABC* có các cạnh OA = a, OB = b, OC = c đôi một vuông góc. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các mp(OBC), mp(OCA), mp(OAB) là 1, 2, 3. Tính a, b, c để thể tích O.ABC nhỏ nhất.

*HD: Chọn hệ trục tọa độ sao cho: .*

*⇒ *

1. Tứ diện *S*.*ABC* có cạnh *SA* vuông góc với đáy và  vuông tại *C*. Độ dài của các cạnh là *SA* = 4, *AC* = 3, *BC* = 1. Gọi *M* là trung điểm của cạnh *AB*, *H* là điểm đối xứng của *C* qua *M*. Tính cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (*SHB*) và (*SBC*).

*HD: Chọn hệ trục toạ độ sao cho:*  *A*(0;0;0), *B*(1;3;0), *C*(0;3;0), *S*(0;0;4) và *H*(1;0;0).

1. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác *ABC* vuông cân tại *A*, *AB* = *AC* = *a* (*a* > 0), hình chiếu của *S* trên đáy trùng với trọng tâm *G* của Δ*ABC*. Đặt *SG* = *x* (*x* > 0). Xác định giá trị của *x* để góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60o.

*HD: Chọn hệ trục toạ độ sao cho: A*(0;0;0), *B*(a;0;0), *C*(0; *a*; 0), .

⇒

1. Cho hình chóp tam giác đều *S*.*ABC* có độ dài cạnh đáy là *a*. Gọi *M*, *N* là trung điểm *SB*, *SC*. Tính theo *a* diện tích Δ*AMN*, biết (*AMN*) vuông góc với (*SBC*).

*HD: Chọn hệ trục toạ độ sao cho: O(0; 0; 0), S(0; 0; h),  (SO = h).*

*⇒ *

1. Cho lăng trụ *ABC*.*A*'*B*'*C*' các các mặt bên đều là hình vuông cạnh *a*. Gọi *D*, *F* lần lượt là trung điểm của các cạnh *BC*, *C*'*B*'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *A*'*B* và *B*'*C*'.

*HD: Chọn hệ trục toạ độ sao cho:*

**

*⇒* 

1. Tứ diện *ABCD* có *AB*, *AC*, *AD* đôi một vuông góc với nhau, *AB* = 3, *AC* = *AD* = 4. Tính khoảng cách từ *A* tới mặt phẳng (*BCD*).

*HD: Chọn hệ trục toạ độ sao cho: A*(0;0;0); *B*(0;0;3); *C*(0;4;0); *D*(4;0;0).

1. Cho hình chóp *SABC* có độ dài các cạnh đều bằng 1, O là trọng tâm của tam giác Δ*ABC*. *I* là trung điểm của *S*O.

a) Mặt phẳng (BIC) cắt SA tại M. Tìm tỉ số thể tích của tứ diện SBCM và tứ diện SABC.

b) *H* là chân đường vuông góc hạ từ *I* xuống cạnh *SB*. Chứng minh rằng *IH* qua trọng tâm *G* của Δ*SAC*.

*HD: Chọn hệ trục toạ độ sao cho: O(0; 0; 0), *; ; ; ; .



1. Cho hình lăng trụ *ABCD*. *A*1*B*1*C*1 có đáy là tam giác đều cạnh *a*. *AA*1 = 2*a* và vuông góc với mặt phẳng (*ABC*). Gọi *D* là trung điểm của *BB*1; *M* di động trên cạnh *AA*1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác *MC*1*D*.

*HD: Chọn hệ trục toạ độ sao cho: A*(0;0;0), *B*(0;*a*;0), *A*1 (0;0;2*a*),, *D*(0;*a*;*a*)

*⇒ Giá trị lớn nhất khi M ≡ A*

1. Cho tứ diện SABC có đáy là ΔABC vuông cân tại B, AB = a,  và SA = a.  tại H,  tại K.

a. Chứng minh 

b. Gọi  Chứng minh B là trung điểm CI.

c. Tính sin góc j giữa SB và (AHK).

d. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp SABC.

*ĐS: a/  c/  d/ *

1. Cho tứ diện SABC có đáy là ΔABC vuông cân tại B, AB = a,  và . Gọi D là trung điểm của AC.

a. Chứng minh khoảng cách từ A đến (SBC) gấp đôi khoảng cách từ D đến (SBC).

b. Mặt phẳng (a) qua A và vuông góc SC, (a) cắt SC và SB tại M và N. Tính thể tích hình chóp SAMN.

c. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

*ĐS: a/  b/  d/ *

1. Cho ΔABC đều cạnh a. Trên đường thẳng  tại A lấy điểm S, SA = h.

a. Tính d(A, (SBC)) theo a và h.

b. Đường thẳng  tại trực tâm H của DSBC, chứng tỏ D luôn qua điểm cố định khi S di động trên d.

c. D cắt d tại S/. Tính h theo a để SS/ nhỏ nhất.

*ĐS: a/  b/ Trọng tâm DABC d/ *

1. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh a,  và . Mặt phẳng (P) qua A và ; (P) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại H, M, K.

a. Chứng minh 

b. Chứng minh BD // (a) và BD // HK.

c. Chứng minh HK đi qua trọng tâm G của DSAC.

d. Tính VS.AHMK.

*ĐS: a/  b/ ;*

*c/  d/ *

1. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD,  và ABCD là hình chữ nhật có AB = a, AD = b, SA = 2a. N là trung điểm SD.

a. Tính d(A, (BCN)), d(SB, CN).

b. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

c. Gọi M là trung điểm SA. Tìm điều kiện a và b để .

Trong trường hợp đó tính VS.BCNM.

*ĐS: a/  b/  c/ *

1. Trong mp(P) cho hình vuông ABCD. Trên tia  lấy điểm S. Đường thẳng  tại S cắt (P) tại M,  tại S cắt (P) tại N. Gọi I là trung điểm MN.

a. Chứng minh A, B, M thẳng hàng; A, D, N thẳng hàng.

b. Khi S di động trên Az, chứng tỏ I thuộc đường thẳng cố định.

c. Vẽ  tại H. Chứng minh AH là đường cao tứ diện ASMN và H là trực tâm DSMN.

d. Cho OS = 2, AB = 1. Tính VASMN.

*ĐS: a/  b/ *

*c/  d/ *

1. Cho hình chóp S.ABCD có , đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Trên các cạnh BC, CD lấy lần lượt các điểm M, N. Đặt CM = x, CN= y (0 < x, y < a).

a. Tìm hệ thức giữa x và y để góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) bằng 45o.

b. Tìm hệ thức giữa x và y để 

*ĐS: a/  b/ *

1. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, cạnh đáy bằng , đường cao SO, cạnh bên bằng .

a. Tính thể tích hình chóp. Xác định tâm Ivà bán kính R của hình cầu (S) nội tiếp hình chóp.

b. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm AB, AD, SC. Mặt phẳng (MNP) cắt SB, SD tại Q và R. Tính diện tích thiết diện.

c. Chứng tỏ rằng mặt phẳng (MNP) chia hình chóp ra hai phần có thể tích bằng nhau.

*ĐS: a/  b/  c/ *

1. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, đường cao SO. Mặt bên tạo với đáy góc . Mặt phẳng (P) chứa cạnh AB và tạo với đáy góc  cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại M, N.

a. Tính góc giữa AN với (ABCD) và BD.

b. Tính khoảng cách giữa AN và BD.

c. Tính thể tích hình khối ABCDMN.

*ĐS: a/  b/  c/ *

1. Cho hình vuông ABCD cạnh  tâm O. Trên tia  lấy điểm S, mặt phẳng (SAD) tạo với đáy góc α.

a. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SA và CD.

b. Mặt phẳng (b) qua AC và vuông góc (SAD) chia hình chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

*ĐS: a/  b/ *

1. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có AB= 2, AD = 4, AA′ = 6. Gọi I, J là trung điểm AB, CD′. Gọi M, N thỏa  

a. Tính khoảng cách từ A đến (BDA′).

b. Chứng minh I, M, J, N đồng phẳng.

c. Xác định tâm K và bán kính R của mặt cầu (S) ngoại tiếp ABDA′.

d. Tính bán kính r của đường tròn giao của (S) và (BDA′).

*ĐS: a/  b/  c/  d/ *

1. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ có các cạnh bằng 2. Gọi M, N là trung điểm AB và DD′.

a. Chứng minh MN // (BDC′). Tính MN và d(MN, (BDC′)).

b. Gọi P là trung điểm C′D′ . Tính VC.MNP và góc giữa MN và BD.

c. Tính bán kính R của đường tròn (A/BD).

*ĐS: a/  b/  c/ *

1. Cho lăng trụ OAB.O′A′D đáy ΔOAB vuông tại O, OA= a, OB = b, OO/ = h. Mặt phẳng (P) qua O vuông góc AB′.

a. Tìm điều kiện a, b, h để (a) cắt cạnh AB, AA/ tại I, J (I, J không trùng A, B, A/).

b. Với điều kiện trên hãy tính: SDOIJ và tỉ số thể tích 2 phần do thiết diện chia lăng trụ.

*ĐS: a/  b/ *

1. Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông tại A,  và SC = AB = AC = . Các điểm M thuộc SA và N thuộc BC sao cho AM = CN = t (0 < t < 2a)

a. Tính độ dài đoạn MN, tìm t để đoạn MN ngắn nhất.

b. Khi MN ngắn nhất, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

*ĐS: a/  b/ *

1. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, có AB= 3, BC = 4. Cạnh bên  và SA = 4.

a. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC.

b. Trên AB lấy 1 điểm E với AE = x. Mặt phẳng (P) qua E song song với SA và BC cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện. Tìm x để diện tích này lớn nhất.

*ĐS: a/  b/ *

1. Cho tam giác đều SAD và hình vuông ABCD cạnh a nằm trong 2 mặt phẳng vuông góc nhau. Gọi I là trung điểm của AD, M là trung điểm của AB, F là trung điểm của SB.

a. Chứng minh rằng mặt phẳng .

b. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và SD giữa CM và SA.

*ĐS: b/ *

1. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A′B′C′D′ có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc . Gọi M là trung điểm cạnh AA′ và N là trung điểm cạnh CC′.

a. Chứng minh rằng 4 điểm B′, M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.

b. Tính cạnh AA′ theo a để tứ giác B′MDN là hình vuông.

*ĐS: b/ *

# ĐỀ THI CHUNG CỦA BỘ GD-ĐT

**Bài 1: (A–2002)** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

*ĐS*: 

**Bài 2: (A–2002)** Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho hai đường thẳng:

 và 

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng D1 và song song với đường thẳng D2.

b. Cho điểm M(2; 1; 4). Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳngD2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

*ĐS*: a/  b/ 

**Bài 3: (B–2002)** Cho hình lập phương ABCDA1B1C1D1 có cạnh bằng a.

a. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A1B và B1D.

b. Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BB1, CD, A1D1. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C1N.

*ĐS*: a/  b/ 

**Bài 4: (D–2002)** Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC);   
AC = AD = 4cm; AB = 3cm; BC = 5cm. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

*ĐS*: 

**Bài 5: (D–2002)** Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho mặt phẳng

(P): 2x – y + 2 = 0 và đường thẳng dm:  (m là tham số).

Xác định m để đường thẳng dm song song với mặt phẳng (P).

*ĐS*: 

**Bài 6: (A–2003)** Cho hình lập phương ABCD.A/B/C/D/. Tính số đo của góc phẳng nhị diện [B, A/C, D].

*ĐS*: 

**Bài 7: (A–2003)** Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A/B/C/D/ có A trùng với gốc của hệ tọa độ, B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A/(0; 0; b) (a >0, b > 0). Gọi M là trung điểm cạnh CC/.

a. Tính thể tích khối tứ diện BDA/M theo a và b.

b. Xác định tỷ số  để hai mặt phẳng (A/BD) và (MBD) vuông góc với nhau.

*ĐS*: a/  b/ 

**Bài 8: (B–2003)** Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A/B/C/D/ có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a, góc . Gọi M là trung điểm cạnh AA/ và Nlà trung điểm cạnh CC/. Chứng minh rằng bốn điểm B/, M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA/ theo a để tứ giác B/MDN là hình vuông.

*ĐS*: 

**Bài 9: (B–2003)** Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho hai điểm   
A(2; 0; 0), B(0; 0; 8) và điểm C sao cho . Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA.

*ĐS*: 5.

**Bài 10: (D–2003)** Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho đường thẳng:



Tìm k để đường thẳng (dk) vuông góc với mặt phẳng (P): x – y – 2z + 5 = 0.

*ĐS*: k = 1.

**Bài 11: (D–2003)** Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng D. Trên D lấy hai điểm A, B với AB= a. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với D và AC = BD = AB. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a.

*ĐS*: 

**Bài 12: (A–2004)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O. Biết A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), . Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.

b. Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

*ĐS*: a/ 

**Bài 13: (B–2004)** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng j(. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo j. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và j.

*ĐS*: 

**Bài 14: (B–2004)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(-4; -2; 4) và đường thẳng

d: 

Viết phương trình đường thẳng D đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

*ĐS*: .

**Bài 15: (D–2004)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lăng trụ đứng ABC.A1B1C1. Biết A(a; 0; 0), B(-a; 0; 0), C(0; 1; 0), B1(-a; 0; b), a > 0, b > 0.

a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B1C và AC1 theo a, b.

b. Cho a, b thay đổi, nhưng luôn thỏa mãn a + b = 4. Tìm a, b để khoảng cách giữa hai đường thẳng B1C và AC1 lớn nhất.

*ĐS*: a/  b/ 

**Bài 16: (D–2004)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1) và mặt phẳng (P): x + y + z – 2 = 0. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

*ĐS*: 

**Bài 17: (A–2005)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng d:  và mặt phẳng (P): .

a) Tìm toạ độ điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2.

b) Tìm toạ độ giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), biết Δ đi qua A và vuông góc với d.

*ĐS: a)  b) A(0; –1; 4); Δ: *

**Bài 18**: **(B–2005)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hình lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ với A(0; –3; 0), B(3; 0; 0), C(0; 3; 0), B′(4; 0; 4).

a) Tìm toạ độ các đỉnh A′, C′. Viết phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC′B′).

b) Gọi M là trung điểm của A′B′. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, M và song song với BC′. Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng A′C′ tại điểm N. Tính độ dài đoạn MN.

*ĐS: a) A′ (0; –3; 4), C′ (0; 3; 4); (S): *

*b) (P): ; MN = *

**Bài 19**: **(D–2005)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng



a) Chứng minh rằng d1 và d2 song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả hai đường thẳng d1 và d2.

b) Mặt phẳng toạ độ Oxz cắt hai đường thẳng d1, d2 lần lượt tại các điểm A, B. Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc toạ độ).

*ĐS: a) (P):  b) SΔOAB = 5*

**Bài 20: (A–2006)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ với A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A′(0; 0; 1). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A′C và MN.

b) Viết phương trình mặt phẳng chứa A′C và tạo với mặt phẳng Oxy một góc α, biết .

*ĐS: a) d(A′C, MN) =  b) (Q1): , (Q2): *

**Bài 21: (A–2006)** Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O′, bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O′ lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích của khối tứ diện OO′AB.

*ĐS: V = .*

**Bài 22: (B–2006)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(0; 1; 2) và hai đường thẳng:



a) Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, đồng thời song song với d1 và d2.

b) Tìm toạ độ các điểm M thuộc d1, N thuộc d2 sao cho ba điểm A, M, N thẳng hàng.

*ĐS: a) (P):  b) M(0; 1; –1), N(0; 1; 1).*

**Bài 23: (B–2006)** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = , SA = a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

*ĐS: VAINB = .*

**Bài 24: (D–2006)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(1; 2; 3) và hai đường thẳng:



a) Tìm toạ độ điểm A′ đối xứng với điểm A qua đường thẳng d1.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d1 và cắt d2.

*ĐS: a) A′ (–1; –4; 1) b) Δ: *

**Bài 25: (D–2006)** Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

*ĐS: V = .*

**Bài 26: (A–2007)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng:



a) Chứng minh rằng d1 và d2 chéo nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P):  và cắt hai đường thẳng d1, d2.

*ĐS: b) d: .*

**Bài 27: (A–2007)** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

*ĐS: VCMNP = .*

**Bài 28: (B–2007)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình: (S): , (P): .

a) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

b) Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

*ĐS: a) (Q):  b) .*

**Bài 29: (B–2007)** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

*ĐS: d(MN, AC) = .*

**Bài 30: (D–2007)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai điểm A(1; 4; 2), B(–1; 2; 4) và đường thẳng Δ: .

a) Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB).

b) Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho  nhỏ nhất.

*ĐS: a) d:  b) M(–1; 0; 4).*

**Bài 31: (D–2007)** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, , BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh ΔSCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

*ĐS: d(H, (SCD)) = .*

**Bài 32: (A–2008)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(2; 5; 3) và đường thẳng



a) Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.

*ĐS: a) H(3; 1; 4) b) (P): *

**Bài 33: (A–2008)** Cho lăng trụ ABC.A′B′C′ có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC =  và hình chiếu vuông góc của đỉnh A′ trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A′.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA′, B′C′.

*ĐS: V =  *

**Bài 34: (B–2008)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho ba điểm A(0; 1; 2), B(2; –2; 1), C(–2; 0; 1).

a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.

b) Tìm toạ độ của điểm M thuộc mặt phẳng  sao cho MA = MB = MC.

*ĐS: a)  b) M(2; 3; –7).*

**Bài 35: (B–2008)** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, SB =  và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

*ĐS: V = ; .*

**Bài 36: (D–2008)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho bốn điểm A(3; 3; 0), B(3; 0; 3), C(0; 3; 3), D(3; 3; 3).

a) Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.

b) Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

*ĐS: a)  b) H(2; 2; 2).*

**Bài 37: (D–2008)** Cho lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên AA′ = . Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A′B′C′ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B′C.

*ĐS: V = ; d = .*

**Bài 38: (A–2009)** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; AB = AD = 2a, CD = a; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng . Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

*ĐS: V = .*

**Bài 39: (A–2009)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P):  và mặt cầu (S): . Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

*ĐS: H(3; 0; 2), r = 4.*

**Bài 40: (A–2009)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P):  va hai đường thẳng . Xác định toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

*ĐS: .*

**Bài 41: (B–2009)** Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A′B′C′ có BB′ = a, góc giữa đường thẳng BB′ và mặt phẳng (ABC) bằng ; tam giác ABC vuông tại C và . Hình chiếu vuông góc của điểm B′ lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A′.ABC theo a.

*ĐS: V = .*

**Bài 42: (B–2009)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các đỉnh A(1; 2; 1), B(–2; 1; 3), C(2; –1; 1) và D(0; 3; 1). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

*ĐS: (P):  hoặc (P):.*

**Bài 43: (B–2009)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P):  và hai điểm A(–3; 0; 1), B(1; –1; 3). Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

*ĐS: Δ: .*

**Bài 44: (D–2009)** Cho hình lăng trụ đứng ABC. A′B′C′ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA′ = 2a, A′C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A′C′, I là giao điểm của AM và A′C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

*ĐS: V = , d = .*

**Bài 45: (D–2009)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm A(2; 1; 0), B(1; 2; 2), C(1; 1; 0) và mặt phẳng (P): . Xác định toạ độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P).

*ĐS: .*

**Bài 46: (D–2009)** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng  và mặt phẳng (P): . Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ.

*ĐS: d: .*



***Chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp và các em học sinh đã đọc tập tài liệu này.***